光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.2020.06.023

# 卫星激光通信中一种基于矩阵扩展的RC-LDPC码构造方法

袁建国*，袁雅琴，刘议靖

（重庆邮电大学 光通信与网络重点实验室，重庆 400065）

**摘　要：** 为降低卫星激光通信系统中的硬件资源，结合斐波那契数列的性质，基于矩阵扩展的方法提出了一种码率兼容低密度奇偶校验（Rate-Compatible Low-Density Parity-Check，RC-LDPC）码的构造方法。用该方法所构造的RC-LDPC码围长为6且具有准循环特性，所需存储元素少，降低了计算复杂度，利于硬件实现，更适合在卫星激光系统中传输。仿真结果表明：利用该方法构造的RC-LDPC码在较大码率范围内均具有良好的译码性能，且在相同条件下，当误码率（BER）为$10^{-6}$时，所构造的RC-LDPC码与同码率、同码长的其他码型相比较，其净编码增益均有一定提高。

**关键词：** 卫星激光通信；码率兼容低密度奇偶校验码；斐波那契数列；矩阵扩展；低复杂度

**中图分类号：** TN929.11　**文章编号：** 1001－5868(2020)06－0879－05

## A Construction Method of RC-LDPC Codes Based on The Matrix Extension for Satellite Laser Communications

YUAN Jianguo，YUAN Yaqin，LIU Yijing

（Key Laboratory of Optical Communication and Networks，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，CHN）

**Abstract：** A novel construction method of rate-compatible low-density parity-check（RC-LDPC）codes based on the matrix extension and combined with the properties of Fibonacci sequences is proposed in order to reduce the hardware resource in satellite laser communication systems. The RC-LDPC code with girth-6 and quasi-cyclic characteristics can be constructed by this construction method，which can save the storage elements and reduce the computational complexity. Its hardware implementation was more easily realized and the RC-LDPC code is more suitable for satellite laser communication systems. The simulation results show that the RC-LDPC code constructed by this method can realize a better decoding performance in a wider code-rate range. Under the same parameters，the net coding gain of the constructed RC-LDPC code is more than those of other codes with the same code-rate and code-length at the bit error rate（BER）of $10^{-6}$.

**Key words：** satellite laser communications；RC-LDPC codes；Fibonacci sequence；matrix extension；low complexity

**收稿日期：**2020－05－29.

**基金项目：**国家自然科学基金项目(61971079，61671091).

* **通信作者：**袁建国　**E-mail：** yyyyjg@126.com

## 0 引言

在卫星激光通信系统中，卫星信道具有时变性，受多径衰落、多普勒、阴影效应及各种外界干扰因素的影响，接收到的信号会发生大幅度变化，所以针对卫星信道的信道编码不仅需要较强的纠错能力，而且还要根据信道的当前状态动态地调整发送码字的码率[1-2]。以前为了动态调整发送码字的码率，需要采用处理不同码率的编译码器，虽然实现了多码率的传输，但是大大浪费了资源[3-4]。而码率兼容技术让高码率码字嵌套在低码率码字中，可以根据估计的信道状态调整发送码字的码率，信道质量好时采用高码率传输码字，信道质量差时采用低码率传输码字[5-6]，这样既可以保证通信的可靠性，又可以最大化地提高信息的传输速率，节约资源。所以对码字的码率兼容技术研究具有现实意义。

信道编译码模块是通信系统中至关重要的一环。低密度奇偶校验(Low-Density Parity-Check，LDPC)码是一种性能十分逼近香农限的线性分组码，它构造灵活、译码简单，适合于硬件实现，被认为是迄今为止纠错性能最好的码之一。LDPC 码的构造方法大致分为随机构造和结构化构造两类[7]。随机构造码纠错性能优异，但是由于没有确定的形式而导致编译码复杂度较高。而结构化构造码具有准循环特性，利用简单的移位寄存即可实现编码，大大降低了编译码复杂度[8-9]，成为研究热点。

卫星激光通信系统传输距离远，硬件资源有限，针对这一特点，本文通过对码率兼容低密度奇偶校验(Rate-Compatible Low-Density Parity-Check，RC-LDPC)码的构造方法进行研究，结合斐波那契数列(Fibonacci Sequence)的性质，提出了一种基于矩阵扩展的低复杂度 RC-LDPC 码构造方法。

## 1 码率兼容 LDPC 码

打孔和扩展是实现码率兼容的两种经典方法[10]。其中矩阵扩展通过同时扩展校验矩阵的行和列，来保持码字信息位数不变，从而实现多码率的变换。其构造灵活，具有较好的性能，适合于实际应用和硬件实现。该方法构造的 RC-LDPC 码的校验矩阵 $\boldsymbol{H}_i$ 可以用如下公式表示：

$$\boldsymbol{H}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{i-1} & 0\\ \boldsymbol{H}_s & \boldsymbol{H}_{ext}\end{bmatrix} \tag{1}$$

RC-LDPC 码分为四个部分，等式右边的 $\boldsymbol{H}_{i-1}$ 为上一次扩展得到的校验矩阵；$\boldsymbol{H}_0$ 则表示母码矩阵，大小为 $M_0\times N_0$，为了保持母码的特性，矩阵中的右上部分为 0，保持信息位长度不变，在母码的基础上，每次扩展都添加 $M$ 行和 $M$ 列；$\boldsymbol{H}_s$ 是每次扩展时添加的一个稀疏矩阵，在这个矩阵中要确保每行至少有一个校验信息，以便建立母码和新校验位之间的依赖关系；$\boldsymbol{H}_{ext}$ 是一个大小为 $M\times M$ 的扩展方阵。第 $i$ 次扩展后码字的码率 $R_i$ 可用式(2)计算：

$$R_i=\frac{N_0-M_0}{N_0+i\times M} \tag{2}$$

本文采用扩展校验位的方法得到一组信息位长度相同、码率不同的 RC-LDPC 码，根据式(1)将码字构造分为以下三个步骤：

(1)首先构造一个高码率母码矩阵 $\boldsymbol{H}_0$；

(2)在母码矩阵的基础上进行矩阵扩展，扩展过程中有两部分需要进行构造，扩展方阵 $\boldsymbol{H}_{ext}$ 和稀疏矩阵 $\boldsymbol{H}_s$，由于右上角填充的零元素，为了均衡码重，构造 $\boldsymbol{H}_{ext}$ 时使其列重不小于 3；

(3)构造稀疏矩阵 $\boldsymbol{H}_s$。为了建立与母码的依赖性，本文采用的方法是将两个 $M\times M$ 的单位矩阵进行特殊排列，其余位置用零元素补全，具体排列方式见图 1，第一次扩展时两个单位矩阵是并排的，第二次及之后的两个单位矩阵之间存在相同的间隔，且呈斜对角线排列。除了第一次扩展的两个并排单位矩阵可能会与母码产生四环之外，余下的排列方式可以巧妙地避免四环的产生，设计好母码可以消除掉全部的四环。

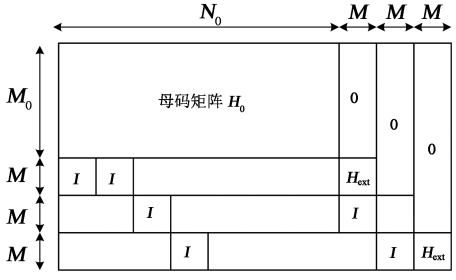



图 1 RC-LDPC 码校验矩阵结构图

## 2 本文 RC-LDPC 码的构造方法

### 2.1 QC-LDPC 码

QC-LDPC 码是一类编译码复杂度很低的结构化 LDPC 码，其校验矩阵由移位矩阵确定，用零矩阵、单位矩阵和循环置换矩阵对移位矩阵进行扩展即可得到最终的校验矩阵。QC-LDPC 码的校验矩

阵和移位矩阵可表示为式(3)～(4)：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{(p_{1,1})} & \boldsymbol{I}_{(p_{1,2})} & \cdots & \boldsymbol{I}_{(p_{1,L})}\\ \boldsymbol{I}_{(p_{2,1})} & \boldsymbol{I}_{(p_{2,2})} & \cdots & \boldsymbol{I}_{(p_{2,L})}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{I}_{(p_{J,1})} & \boldsymbol{I}_{(p_{J,2})} & \cdots & \boldsymbol{I}_{(p_{J,L})}\end{bmatrix}_{Jp\times Lp} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_{1,1} & \boldsymbol{p}_{1,2} & \cdots & \boldsymbol{p}_{1,L}\\ \boldsymbol{p}_{2,1} & \boldsymbol{p}_{2,2} & \cdots & \boldsymbol{p}_{2,L}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{p}_{J,1} & \boldsymbol{p}_{J,2} & \cdots & \boldsymbol{p}_{J,L}\end{bmatrix}_{J\times L} \tag{4}$$

其中，$J$ 和 $L$ 分别表示移位矩阵的行数和列数，$p$ 为扩展因子，$\boldsymbol{I}_{(p_{i,j})}(1\leqslant i\leqslant J,1\leqslant j\leqslant L)$表示 $p\times p$ 的循环置换矩阵，$p_{i,j}\in\{-1,0,\cdots,p-1\}$ 为每个置换矩阵的移位值，当 $p_{i,j}=-1$ 时，$\boldsymbol{I}_{(p_{i,j})}$ 表示一个 $p\times p$ 的零矩阵，当 $p_{i,j}=0$ 时，$\boldsymbol{I}_{(p_{i,j})}$ 表示一个 $p\times p$ 的单位矩阵。

在移位矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中，若干个点可能会构成一个环，扩展成校验矩阵之后依然存在同样大小的环，环的长度会影响 LDPC 码的译码性能，短环的存在甚至会使 LDPC 码在译码时不能收敛，所以在构造 LDPC 码时，至少要保证其校验矩阵中不存在四环。对于移位矩阵中的移位值序列，在校验矩阵中存在长度为 $2k$ 的环时，满足定理 1[11]。

定理 1 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2k-1},a_{2k})$是移位矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的序列，其中 $a_i$ 和 $a_{i+1}$ 在同一行或同一列，$a_i$ 和 $a_{i+2}$ 在不同行且不同列，则序列$(a_1,a_2,\cdots,a_{2k-1},a_{2k})$构成校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中存在长度为 $2k$ 的环的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{2k}(-1)^i a_i\equiv 0\bmod p \tag{5}$$

其中，$p$ 是扩展维数。定理 1 可作为检测校验矩阵中是否存在短环的依据，通过巧妙的设计移位矩阵，可以构造译码性能较好的大围长 LDPC 码校验矩阵。本文将根据 QC-LDPC 码的构造原理来设计母码矩阵 $\boldsymbol{H}_0$ 和扩展方阵 $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$。

### 2.2　$\boldsymbol{H}_0$ 的构造方法

定义 1：对于一个数列 $F(n)$，$n$ 为非负整数，如果 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)(n\geqslant 2)$；$F(0)=1$，$F(1)=1$，则满足以上条件的数列称为斐波那契数列。斐波那契数列完全是由自然数组成的数列，其前后项比值趋近于黄金比值 0.618，又称为黄金分割数列，典型的斐波那契数列表示如下：1,1,2,3,5,8,13,21,34,…。

定理 2：对于一个斐波那契数列，若 $n>m$，且 $n,m,k\in Z^+$，则有

$$F(n+k)-F(n)>F(m+k)-F(m) \tag{6}$$

定理 2 表示斐波那契数列中序号差相等的斐波那契数的差值组成的新数列是一个单调递增数列，鉴于斐波那契数列的优异性质，可用其构造纠错性能良好的 LDPC 码。

构造一个高码率的校验矩阵 $\boldsymbol{H}_0$ 作为 RC-LDPC 码的母码矩阵，利用斐波那契数列设计其移位矩阵 $\boldsymbol{P}_0$，构造方法为：第一行元素取 0，令 $2\leqslant i\leqslant J,1\leqslant j\leqslant L$，从第二行开始，移位矩阵中的元素表示为 $\boldsymbol{P}_0(i,j)=F(2i+j)+j$，所得矩阵如式(7)：

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ F(2\times 2+1)+1 & F(2\times 2+2)+2 & F(2\times 2+3)+3 & \cdots & F(2\times 2+L)+L\\ F(2\times 3+1)+1 & F(2\times 3+2)+2 & F(2\times 3+3)+3 & \cdots & F(2\times 3+L)+L\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F(2\times J+1)+1 & F(2\times J+2)+2 & F(2\times J+3)+3 & \cdots & F(2\times J+L)+L\end{bmatrix}_{J\times L} \tag{7}$$

从式中可以看出除第一行元素之外，其余每行都是递增数列，每一列也是递增数列，由定理 1 和 2 可知，经过扩展之后得到的校验矩阵围长为 6，不存在四环。确定了移位矩阵的行数和列数之后，即可对其进行填充操作，0 元素用 $p\times p$ 的单位矩阵替换，其余元素用 $p\times p$ 的单位矩阵向右循环移位相应位数的置换矩阵替换，最终得到 $Jp\times Lp$ 的校验矩阵，其中 $p$ 取值要大于移位矩阵中元素的最大值。

### 2.3　$\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$ 的构造方法

在上一次扩展之后的矩阵基础上添加 $M$ 行和 $M$ 列，得到更低码率的码字，添加的扩展方阵 $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$ 可以补充高码率和低码率码字之间的依赖性。采用与母码矩阵类似的构造方法，首先根据斐波那契数列构造一个 $J\times J$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}_{\text{ext}}$，令 $1\leqslant i\leqslant J,1\leqslant j\leqslant J$，矩阵中的元素用 $F(i+2j)$表示，所得矩阵如式(8)：

$$\boldsymbol{P}_{\text{ext}}=\begin{bmatrix} F(1+2\times1) & F(1+2\times2) & F(1+2\times3) & \cdots & F(1+2\times J) \\ F(2+2\times1) & F(2+2\times2) & F(2+2\times3) & \cdots & F(2+2\times J) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F(J+2\times1) & F(J+2\times2) & F(J+2\times3) & \cdots & F(J+2\times J) \end{bmatrix}_{J\times J} \tag{8}$$

该矩阵每行和每列元素均是递增的，同理可知扩展次数 $z>F(J+2\times J)$ 时，此方法构造的校验矩阵不存在四环，选择合适的 $J$ 值和扩展次数 $z$，用零矩阵、单位矩阵和循环置换矩阵进行填充，得到大小为 $M\times M$ 的 $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$。

按照图 1 的方式将母码矩阵、扩展方阵以及稀疏矩阵组合起来，每增加 $M$ 行和 $M$ 列，可得一系列由高码率到低码率的 RC-LDPC 码。母码矩阵和扩展方阵中均不存在四环，由此可知组合之后得到的校验矩阵亦不存在四环，最终构造的 RC-LDPC 码围长为 6。

## 3 仿真分析

根据上述构造方法构造(3,9)母码移位矩阵，如式(9)所示，取 $p=390$，$M=390$，得到信息位长度为 2340，码长为 3510 的母码，之后进行矩阵扩展，得到码率集合为{2/3,3/5,6/11,1/2,6/13}的 RC-LDPC 码。

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 11 & 17 & 26 & 40 & 62 & 97 & 153 \\ 9 & 15 & 24 & 38 & 60 & 95 & 151 & 241 & 386 \end{bmatrix} \tag{9}$$

为了验证本文所提出的构造码型的译码性能，对其进行仿真实验。仿真环境：信道为加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise，AWGN)信道，调制方式采用二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying，BPSK)调制，译码方式为置信传播(Belief Propagation，BP)算法，迭代次数为 50 次。对各个码率的码字进行仿真分析，图 2 给出了码率集合中码字的误码性能，从图 2 中可以看出，码率集合中每个码率的码字都具有较好的瀑布区性能且没有出现明显的错误平层。

为了验证 RC-LDPC 码单个码率的码字性能，将码率为 0.67 的 RC-LDPC 码在相同条件下与同码长同码率的利用渐进边增长(Progressive Edge Growth，PEG)算法构造的 PEG-LDPC(3510,2340)码和文献[11]中利用大衍数列(Dayan Sequence，DY)及原模图(Protograph)构造的多码率 P-DY-QC-LDPC(3510,2340)码进行仿真对比，如图 3 所示，本文构造的 RC-LDPC 码有更好的瀑布区性能，且当误码率为 $10^{-6}$ 时，本文构造的 RC-LDPC 码的净编码增益比 PEG-LDPC(3510,2340)码和 P-DY-QC-LDPC(3510,2340)码分别提高了约 0.03 和 0.29 dB。

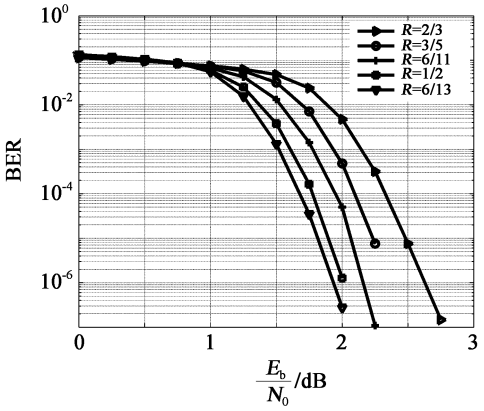



图 2 不同码率下信息位长 2340 的 RC-LDPC 码仿真图

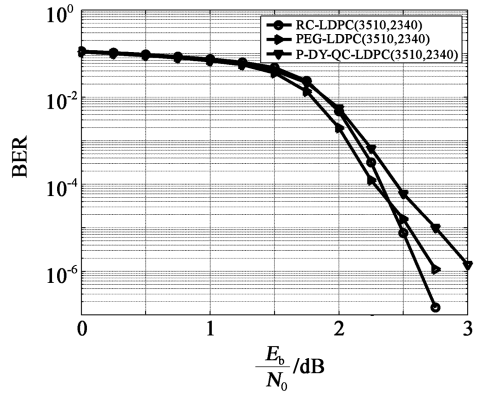



图 3 码率为 0.67 的 RC-LDPC 码与其他码仿真对比图

为了验证 RC-LDPC 码在其他码率的译码性能，将码率为 0.5 的 RC-LDPC 码与文献[11]中直接利用大衍数列构造的 DY-QC-LDPC(4680,2340)码和文献[10]中利用卢卡斯数列(Lucas Sequence，LS)构造的 LS-QC-LDPC(4680,2340)码进行对比，由图 4 可以看出，在误码率为 $10^{-6}$ 时，RC-LDPC 码比同码长同码率的 DY-QC-LDPC(4680,2340)码和 LS-QC-LDPC(4680,2340)码分别有 0.29 和 1.73 dB 的净编码增益。

需要说明的是，进一步分析本文构造方法可知，本文构造方法构造简单，只需储存扩展因子和数列的前两个元素，其余元素的值通过简单的四则运算

便可得到，在很大程度上节省了系统的存储空间，从而节约其硬件资源，因而本文构造方法比较适用于卫星激光通信系统。

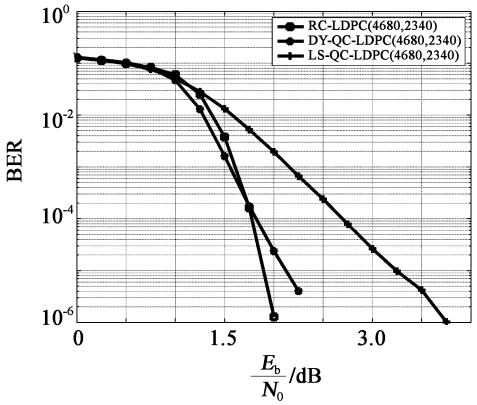



图 4　码率为 0.5 的 RC-LDPC 码与其他码字仿真对比图

## 4　结束语

本文利用斐波那契数列的特性并基于矩阵扩展，提出了一种适用于卫星激光通信系统中 RC-LDPC 码的新颖构造方法。仿真结果表明：在同等条件下，本文所构造的 RC-LDPC 码纠错性能在同等码长码率下优于所对比其他码型，并且在较大码率范围内均具有良好的纠错性能。另外，本构造方法能在很大程度上降低计算复杂度，节省系统的存储空间，从而节约其硬件资源，更适用于卫星激光通信系统。对后续卫星激光通信系统的信道编码研究具有一定的参考价值。

**参考文献：**

[1] Wu X, Jiang M, Zhao C, et al. Low-rate PBRL-LDPC codes for URLLC in 5 G[J]. IEEE Wireless Commun. Lett., 2018, 7(5): 800-803.

[2] Ten Brink S, Kramer G, Ashikhmin A. Design of low-density parity-check codes for modulation and detection[J]. IEEE Trans. on Commun., 2004, 52(4): 670-678.

[3] Zhang K, Ma X, Zhao S, et al. A new ensemble of rate-compatible LDPC codes[C]//Proc. of IEEE. Inter. Symp. on Information Theory, 2012: 2536-2540.

[4] Chen T Y, Vakilinia K, Divsalar D. Protograph-based raptor-like LDPC codes[J]. IEEE Trans. on Commun., 2015, 63(5): 1522-1532.

[5] Wang B, Chen P, Fang Y, et al. The design of vertical RS-CRC and LDPC code for ship-based satellite communications on-the-move[J]. IEEE Access, 2019: 44977-44986.

[6] Nguyen T V, Nosratinia A, Divsalar D. Rate compatible short length protograph LDPC codes[J]. IEEE Commun. Lett., 2013, 17(5): 948-951.

[7] Huang J, Zhou W, Zhou S. Structured nonbinary rate-compatible low-density parity-check codes [J]. IEEE Commun. Lett., 2011, 15(9): 998-1000.

[8] 黄　胜，庞晓磊，贾雪婷，等. 基于卢卡斯数列的大围长 QC-LDPC 码构造方法[J]. 电子科技大学学报，2016，45(2)：174-178，184.
Huang Sheng, Pang Xiaolei, Jia Xueting, et al. Construction method of large girth QC-LDPC codes based on Lucas sequences [J]. J. of University of Electronic Science and Technol. of China, 2016, 45(2): 174-178, 184.

[9] 袁建国，郑德猛，蹇　红. 一种利用大衍数列构造多码率原模图 QC-LDPC 码的方法[J]. 半导体光电，2018，39(3)：389-393.
Yuan Jianguo, Zheng Demeng, Jian Hong. A construction method of multi-code-rate protograph QC-LDPC codes using Dayan sequence[J]. Semiconductor Optoelectronics, 2018, 39(3): 389-393.

[10] Mu X, Shen C, Bai B. A combined algebraic- and graph-based method for constructing structured RC-LDPC codes [J]. IEEE Commun. Lett., 2016, 20(7): 1273-1276.

[11] Zhang Y, Yang F F. The performance analysis of QC-LDPC codes constructed by Dayan sequence for coded cooperative relay[C]// Proc. of IEEE Computers, Communications and IT Applications Conf., 2014: 84-88.

**作者简介：**

**袁建国**(1968—)，男，重庆人，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为光通信系统中 LDPC 编译码技术与 OFDM 技术。