光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.2021.01.023

一种基于均匀量化的快速简化极化码 SC 译码算法

袁建国*，方小倩，梁栩桁，李志伟，熊首泽，徐一为

（重庆邮电大学 光电信息感测与传输技术重庆市重点实验室，重庆 400065）

摘　要： 针对极化码中现有基于均匀量化的串行抵消(SC)译码算法译码复杂度高的问题，提出一种基于均匀量化的快速简化 SC 译码算法。该算法保留了原算法的整数型运算，可节省大量存储空间并利于硬件实现，再通过加入特殊结点的识别来降低算法的运算时间复杂度。仿真结果表明：所提快速简化 SC 译码算法的时间复杂度较原算法降低了 46.29%，同时，在误块率为 10^{-5} 时，译码性能较原算法仅相差 0.1 dB。

关键词： 极化码；均匀量化；快速简化 SC 译码算法；误块率

中图分类号： TN929.11　**文章编号：** 1001－5868(2021)01－0127－05

A Fast Simplified SC Decoding Algorithm of Polar Codes Based on Uniform Quantization

YUAN Jianguo, FANG Xiaoqian, LIANG Xuheng, LI Zhiwei, XIONG Shouze, XU Yiwei

(Chongqing Key Laboratory of Photoelectronic Information Sensing and Transmitting Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, CHN)

Abstract: A fast simplified SC decoding algorithm based on the uniform quantization is proposed to improve the problems of the high decoding complexity for the existing SC decoding algorithms in polar codes. The proposed algorithm retains the integer operation of the original SC decoding algorithm based on uniform quantization to save a lot of the storage space and facilitate the hardware implementation. Furthermore, the proposed algorithm reduces the operation time complexity by means of adding the identification of the special node. The simulation results show that the proposed fast simplified SC decoding algorithm, compared with the original algorithm, can reduce the time complexity by 46.29%. At the same time, the decoding performance of the proposed algorithm is only 0.1 dB lower than that of the original algorithm at the block error rate of 10^{-5}.

Key words: polar codes; uniform quantization; fast simplified SC decoding algorithm; block error rate

0　引言

极化码是第一种被理论证明在码长趋于无穷大时其信道容量可达香农极限的纠错码，因具有可实用性的线性复杂度编译码能力而成为 5G 通信系统中增强移动宽带场景下控制信道的编码方案。极化码的两个主要研究方向是构造极化信道和译码算法，其中极化码译码的研究重点是降低译码复杂度和提高译码性能。

串行抵消(Successive-Cancellation，SC)译码算法是 Arikan[1] 根据极化码的结构提出的一种基于递归思想的译码算法，该算法采用浮点数进行计算，计算复杂度高，不利于硬件实现。因此，很多研究者通过降低 SC 译码器的复杂度来改进 SC 译码算法。文献[2]中，张宇国等通过将部分特定位置的信息比特与冻结比特进行位置交换，以实现新的比特混合

收稿日期：2020－09－04.

基金项目：国家自然科学基金项目(61971079，61671091)；2020 年重庆邮电大学大学生科研训练计划项目.

* **通信作者：**袁建国　**E-mail：**yyyyjg@126.com

方案，从而减少 SC 译码算法中的冗余计算，降低其时间复杂度。王晓蕾等[3]提出了一种基于冻结比特的优先剪枝冻结比特算法，降低了 SC 译码算法的复杂度。以上文献主要是针对 SC 译码的时间复杂度进行改进，并没有涉及 SC 译码器的存储复杂度。文献[4]提出了一种通过对 SC 译码器的输入信号进行均匀量化取整操作来降低 SC 译码器的存储复杂度的算法，但该算法并未对 SC 译码器的时间复杂度进行改进。

本文针对基于均匀量化的 SC 译码算法译码复杂度高的问题，提出了一种基于均匀量化的快速简化 SC(UQ-Fast-SSC)译码算法。该算法的核心思想是对 SC 译码器的输入进行均匀量化取整，再加入对 Rate-0 结点、Rate-1 结点、重复(Repetition，REP)结点、单奇偶校验(Single-Parity-Check，SPC)结点的识别，进一步降低 SC 译码器的时间复杂度，从以上两个方面对 SC 译码算法进行改进。该改进算法通过对输入信号进行整数型均匀量化，减少了存储空间，有利于硬件的实现。

1 SC 译码算法

极化码的 SC 译码算法是基于递归思想从 u_1 开始逐个译码信源比特，直到 u_N。极化码(N,K,A,u_{A^c})表示：码长为 N，信息位集合长度为 K，信息位索引值构成的集合为 A，信息序列 u_1^N 和冻结位集合 u_{A^c}，u_1^N 通过信道 W_N 传输后得到序列 y_1^N，转移概率为 $W_N(y_1^N \mid u_1^N)$。假设一个接收信号 y_1^N 对应一个传输码字 x_1^N，SC 译码器按照递归的方式估计出信息比特 u_1 到 u_N，如果 $i \in A^c$，$\hat{u}_i = u_i$，u_i 的预设值一般设置为 0；若 $i \in A$，则 u_i 判决式为

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \dfrac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} \mid 0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} \mid 1)} \geqslant 1 \\ 1, & \text{else} \end{cases} \tag{1}$$

其中，$W_N(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} \mid \hat{u}_i)$是转移概率，其表示输入为 $\hat{u}_i$、输出为 y_1^N 和 $\hat{u}_1^{i-1}$ 的概率，可分析出转移概率不仅可以观测到物理信道 W 的输出 y_1^N，还能观测到比特值 $\hat{u}_1^{i-1}$。式(1)中的判决条件是两个转移概率的比值，其表示的是 $\hat{u}_1^i$ 的似然比。当 $\hat{u}_A \neq u_A$ 时，出现译码错误。

SC 译码器的结点更新规则如下：

$$\begin{cases} f(L_1, L_2) = \ln \dfrac{1 + \mathrm{e}^{L_1 + L_2}}{\mathrm{e}^{L_1} + \mathrm{e}^{L_2}} \\ g(L_1, L_2) = (1 - 2U_1)L_1 + L_2 \end{cases} \tag{2}$$

上式分别被称为 f 运算和 g 运算，其中 L_1 和 L_2 表示与极化信道有关的中间对数似然比(Log-Likelihood Ratio，LLR)，U_1 表示通过 f 运算估计出的中间信息比特。

但由于式(2)中涉及了对数运算和指数运算，不利于硬件的实现，为了简化硬件实现，把式(2)中的 $f(L_1, L_2)$运算变为在 LLR 域的和积算法，如式(3)所示：

$$\begin{cases} f(L_1, L_2) = 2\tanh^{-1}\left(\tanh\left(\dfrac{L_1}{2}\right)\tanh\left(\dfrac{L_2}{2}\right)\right) \\ g(L_1, L_2) = (1 - 2U_1)L_1 + L_2 \end{cases} \tag{3}$$

由于式(3)中的 $f(L_1, L_2)$运算涉及正切双曲函数和反正切双曲线函数的运算，硬件实现复杂，常常用最小和算法对它进行如式(4)近似：

$$f(L_1, L_2) \approx \mathrm{sign}(L_1)\mathrm{sign}(L_2)\min\{|L_1|, |L_2|\} \tag{4}$$

其中，sign 表示取符号位。最小和算法虽与和积算法性能近似，但其简化了计算方式，硬件实现容易。

2 UQ-Fast-SSC 译码算法

2.1 快速简化 SC 译码算法

快速简化 SC(Fast Simplified SC，Fast-SSC)译码算法的核心原理是通过结合极化码特殊的编码方式和信息比特与冻结比特的分布特点，识别出许多可以并行译码的特殊结点，包括 Rate-0，Rate-1，REP 和 SPC 结点[5]。

(1)Rate-0 结点

该结点的特点是其所有叶子结点都表示冻结比特，即信息向量为：$u_1^R = (0, 0, \cdots, 0, 0)$，当译码访问到该结点时，不必向该结点传递 LLR 序列，Rate-0 结点会自动反馈一个全零码字 $\boldsymbol{\beta}_1^R = \mathbf{0}_1^R$ 给父结点，而省去了中间一系列的 f 运算和 g 运算，从而降低了译码复杂度且节省了存放中间 LLR 序列的空间。

(2)Rate-1 结点

Rate-1 结点的特点是所有的叶子结点都是信息比特，即 $\boldsymbol{u}_1^R = \mathbf{1}_1^R$，当译码访问到该结点时只需对其输入的 LLR 向量进行硬判决，就可得到对应构成的码字并反馈给其父结点。

(3)REP 结点

REP 结点的特点是最右侧的叶子结点对应的是信息比特，其余叶子结点对应的全是冻结比特，其译码方式为：信源向量 $\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{R}}=(0,0,\cdots,0,u_{\mathrm{R}})$，通过生成矩阵形成的码字向量为：$\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{R}}=(u_{\mathrm{R}},u_{\mathrm{R}},\cdots,u_{\mathrm{R}},u_{\mathrm{R}})$，其中 u_{R} 的值的判决方式如式(5)所示：

$$u_{\mathrm{R}}=\begin{cases}0, & \text{if} \quad \sum_{i=0}^{R-1}LLR(i)\geqslant 0\\ 1, & \text{else}\end{cases} \tag{5}$$

其中，$LLR(i)$表示结点输入 LLR 向量中第 i 个元素。

(4)SPC 结点

SPC 结点的特点是只有第一位叶子结点为冻结比特，其余位都是信息比特，即 $\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{R}}=(0,u_2,\cdots,u_{\mathrm{R}-1},u_{\mathrm{R}})$，在经过 SC 译码算法后在结点处得到的构成码字为 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{R}}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{\mathrm{R}})$，构成码字比特满足单奇偶校验特性，即 $\bigoplus_{i=1}^{R}\beta_i=0$。SPC 结点处构成码字计算如式(6)所示：

$$\beta_i=\begin{cases}h(LLR(i))\oplus \text{parity}, & \text{when} \quad i=j\\ h(LLR(i)), & \text{otherwise}\end{cases} \tag{6}$$

其中，$h(LLR(i))$硬判决表示如果 $LLR(i)\geqslant 0$，则 $h(LLR(i))=0$，反之 $h(LLR(i))=1$；$parity=\bigoplus_{i=0}^{R-1}h(LLR(i))$；式(6)中的判决条件是根据 $j=\arg_i\min|LLR(i)|$ 计算的。

2.2　UQ-Fast-SSC 译码算法

SC 译码算法的结点更新规则是采用浮点数运算，但浮点数运算消耗内存较大，不利于硬件的实现，所以通过量化的方式简化结点更新数据类型，将浮点型简化为整数型进行运算，从而降低 SC 译码器的存储复杂度。量化可分为均匀量化和非均匀量化，均匀量化是指把输入信号的取值域等间隔分割量化，其优点是可以降低编译码复杂度。本文采用了均匀量化的方式，虽然存在部分性能损失的情况，但量化方式简单，利于硬件实现。

对于二进制输入信道，信道编码器的输出比特序列经双映射后进入信道，信源比特 $u\in\{0,1\}$，经过二进制相移调制后的传输信号 $x=1-2u$，$x\in\{-1,1\}$，x 经过加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise，AWGN)信道，信道输出值 $y=x+n$，可以分析出 y 是服从均值为 $x=\pm 1$，方差为 σ^2 的正态分布，量化范围根据“3σ 规则”确定。均匀量化过程如下：设定信噪比(Signal Noise Ratio，SNR)、码率 R，因为 $E_{\mathrm{b}}=E_{\mathrm{s}}/R$，通常 $E_{\mathrm{s}}=1$，有：

$$SNR=10\lg\left(\frac{E_{\mathrm{b}}}{N_0}\right)=10\lg\left(\frac{E_{\mathrm{s}}}{N_0}\cdot\frac{1}{R}\right) \tag{7}$$

$$N_0=10^{-\frac{SNR}{10}}\times\frac{1}{R} \tag{8}$$

根据式(7)，(8)可以解得 N_0，再根据式(9)解出 σ。

$$\sigma^2=\frac{N_0}{2} \tag{9}$$

从而可以计算出输出信号 y 的取值范围：当 $\mu=-1$ 时，输出信号 y 的取值范围为 $[-1-3\sigma,-1+3\sigma]$；当 $\mu=1$，输出信号 y 的取值范围为 $[1-3\sigma,1+3\sigma]$。即信道输出的原始信息的输出信号 y 的取值范围为 $[-1-3\sigma,1+3\sigma]$，得到该取值范围后开始计算量化步长：

$$\Delta=\frac{(1+3\sigma)-(-1-3\sigma)}{2T}=\frac{1+3\sigma}{T} \tag{10}$$

加入对溢出数据处理的 SC 译码器输入信号 y 的量化规则如下：

$$Q(y)=\begin{cases}T, & n\geqslant T\\ n, & -T<n<T\\ -T, & n\leqslant -T\end{cases} \tag{11}$$

其中，y 的量化值 $n=y/\Delta$。对信道输出信号 y 均匀量化后再对其取整，其中 floor 表示向下取整，ceil 表示向上取整。

$$Q(y)=\begin{cases}\text{floor}(y/\Delta), & \text{if} \quad y\geqslant 0\\ \text{ceil}(y/\Delta), & \text{if} \quad y<0\end{cases} \tag{12}$$

UQ-Fast-SSC 译码算法通过特殊结点的识别来降低 SC 译码算法的时间复杂度，通过简化数据类型来减少 SC 译码算法的存储复杂度，从而利于 SC 译码器的硬件实现。

本文着重研究量化在最小和算法下的应用，其研究路线是：(1)根据“3σ 规则”量化的最小和算法下的量化算法设定均匀量化规则。假设采用 M 比特均匀量化方式，量化步长为 Δ。M 的第一位表示符号位，其余$(M-1)$比特表示量化范围，则量化范围为 $[-T,\cdots,-1,0,1,\cdots,T]$，其中 $T=2^{(M-1)}-1$[6]。由“3σ 规则”可知，正态随机变量在 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 范围内出现的概率约为 99.74%；(2)根据设定的均匀量化规则对信道输出信号 y 进行量化取整；(3)将量化后的 $Q(y)$作为 SC 译码器的输入；(4)译码过程中对特殊结点的识别。综合以上四个步骤完成对提出的 UQ-Fast-SSC 译码算法的构造。

3　性能分析

3.1　仿真性能分析

本文仿真是在 AWGN 信道下，对 UQ-Fast-

SSC 译码算法的译码性能进行仿真验证。在量化过程中，量化电平数会影响译码性能和硬件的实现，查阅相关资料结合本文仿真码长，本文中将量化比特取 $M=8$。

仿真数据：信道为 AWGN 信道，调制方式采用二进制相移调制，信噪比 $SNR=3$ dB，码率 $R=1/2$。量化比特数 $M=8$。量化取值范围为：$[-T,\cdots,-1,0,1,\cdots,T]$，$T=2^{(M-1)}-1=127$。按照本文提出的均匀量化算法可算出输出信号 y 的量化范围为：$[-3.123\,9,3.123\,9]$，从而获得了被量化取整后的 $Q(y)$，将其作为 SC 译码器的输入。图 1 显示了信道输出的概率密度函数随输出信号 y 的变化情况。

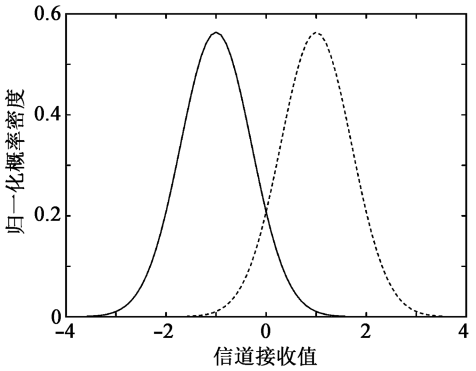


图 1 AWGN 信道接收值的概率密度函数

仿真参数：码长 $N=256$，码率 $R=1/2$，信息位索引集合 A 是通过 MATLAB 在信噪比为 3 dB 的 AWGN 信道下，基于高斯近似算法[7]产生的。利用 MATLAB 对其在 AWGN 信道上进行仿真，可得出改进 SC 译码算法性能仿真曲线如图 2 所示。

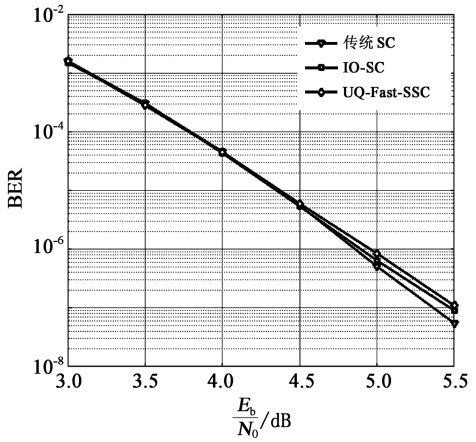


图 2 三种算法的误码率随信噪比的变化曲线

图 2 显示了传统 SC 译码算法、文献[6]提出的基于均匀量化的整数操作 SC 译码算法(IO-SC)和 UQ-Fast-SSC 随信噪比变化的误码率(Bit Error Rate，BER)性能的比较。从图 2 中可以看出三种译码算法在信噪比小于 4.5 dB 时译码性能相当，当信噪比(E_b/E_0)大于 4.5 dB 时，UQ-Fast-SSC 译码算法会有一些译码性能的损失，当 BER 为 10^{-6} 时，UQ-Fast-SSC 译码算法与传统 SC 译码算法信噪比仅相差 0.1 dB，与 IO-SC 算法的译码性能相差 0.05 dB。但 UQ-Fast-SSC 译码算法较其他两种算法降低了时间复杂度，减少了存储空间，更有利于硬件的实现。

图 3 显示的是传统 SC 译码算法、IO-SC 算法和 UQ-Fast-SSC 译码算法的误块率(Block Error Rate，BLER)性能随信噪比的变化。从图 3 中可以看出，当信噪比小于 4.5 dB 时，三种译码算法的译码性能近似。当信噪比大于 4.5 dB 时，IO-SC 算法和 UQ-Fast-SSC 译码算法都存在部分性能损失，当 BLER 为 10^{-5} 时，UQ-Fast-SSC 译码算法与传统 SC 译码算法性能相差 0.12 dB，与 IO-SC 算法性能相差 0.1 dB。

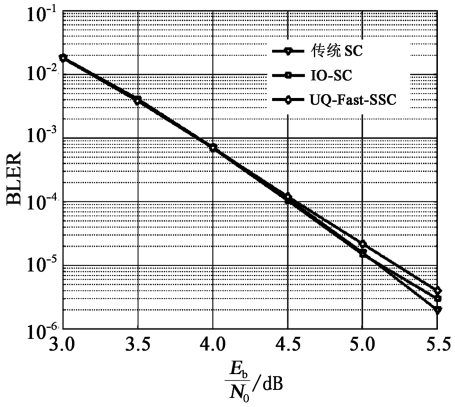


图 3 三种算法的误块率随信噪比的变化曲线

3.2 复杂度分析

在上述仿真环境下结合仿真数据对改进 SC 算法的复杂度进行如下分析：改进 SC 算法生成了如表 1 所示的特殊结点，包括生成的结点类型及各结点所在位置。其中 u_i^j 表示长度为 $j-i+1$ 的结点，i 和 j 分别表示结点的起始位置和结束位置对应的索引号，其取值范围为 $[1,N]$ 且 $i<j$，例：u_1^{32} 表示从 u_1 开始的一个长度为 32 的 Rate-0 结点。

基于均匀量化的 SC 译码算法时间复杂度是 $T(n)=O(N\log_2 N)$，其中包括 $N/2\log_2 N$ 的 f 运算和 $N/2\log_2 N$ 次的 g 运算，加入特殊结点识别后的 UQ-Fast-SSC 译码算法时间复杂度的具体分析

如下：一个长度为 N_v 的特殊结点由于存在特殊译码方式，可节省时间复杂度的计算方式为 $T(n)=O(N_v\log_2 N_v)$，结合试验数据分析可知，Rate-0 可节省的时间复杂度为 $T(n)=\sum O(N_v\log_2 N_v)$，$N_v=[32,16,4,2]$。由表 1 可知，该仿真数据中一共有 4 个长度分别为 32，16，4 和 2 的 Rate-0 结点，其余结点可节省的时间复杂度计算方式与 Rate-0 类似。经计算，在本次仿真试验数据中 Rate-0 可节省 11.43%的时间复杂度，Rate-1 可节省 7.91%的时间复杂度，REP 可节省 11.32%的时间复杂度，SPC 可节省 15.63%的时间复杂度，总地来说，UQ-Fast-SSC 译码算法在本次仿真环境下相比于传统的 SC 译码算法和 IO-SC 算法可节省约 46.29%的时间复杂度。

表 1　结点类型及位置

结点类型	结点所在位置	总结点数
Rate-0	u_1^{32}，u_{33}^{48}，u_{145}^{148}，u_{149}^{150}	4
Rate-1	u_{151}^{152}，u_{225}^{256}	2
REP	u_{49}^{56}，u_{57}^{60}，u_{65}^{80}，u_{81}^{88}，u_{89}^{92}，u_{97}^{104}，u_{129}^{144}，u_{161}^{164}，u_{193}^{196}	9
SPC	u_{61}^{64}，u_{93}^{96}，u_{105}^{112}，u_{113}^{128}，u_{153}^{160}，u_{165}^{168}，u_{169}^{176}，u_{177}^{192}，u_{197}^{200}，u_{201}^{208}，u_{209}^{224}	11

UQ-Fast-SSC 译码算法在量化过程中避免了制作、存储和查找量化表，减少了存储空间。SC 译码器中 LLR 的存储器中所有数据都是基于 8 bit 表示，采用了内存为 4 Byte 的整数进行存储，相比于内存为 8 Byte 的浮点数进行存储的 SC 译码算法，其存储空间节省了约 50%，特殊结点的识别省去了计算部分中间 LLR 序列，进一步减少了存储占用。

综上所述，本文提出的 UQ-Fast-SSC 译码算法与现有基于均匀量化的 SC 译码算法相比，具有如下优点：(1)所使用的均匀量化算法避免了制作、存储和查找量化表，减少了存储空间，降低了硬件实现难度；(2)运算中输入信号的值都用一个 M 比特整数表示，译码性能与浮点数运算的译码算法基本保持一致；(3)算法中添加了 Rate-0，Rate-1，REP 和 SPC 四种特殊结点的识别，极大程度上地降低了 SC 译码算法的运算时间复杂度，降低了译码时延。

4　结论

本文针对现有基于均匀量化的 SC 译码算法译码复杂度高的问题，提出了一种 UQ-Fast-SSC 译码算法。该算法保留了原基于均匀量化的 SC 译码算法的整数型运算，节省了大量存储空间且利于硬件实现，在此基础上加入对特殊结点的识别来降低算法的时间复杂度，虽然损失了部分译码性能，但是其从时间复杂度和存储复杂度两个方面降低了 SC 译码算法的复杂度，利于 SC 译码器的硬件实现。所提 UQ-Fast-SSC 译码算法为 SC 译码器的硬件实现提供了一种实用性的参考。

参考文献：

[1] Arikan E. Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2009, 55(7): 3051-3073.

[2] 张宇国，周　健. 极化码串行抵消译码算法延迟性的改进[J]. 计算机应用研究，2019，36(1)：220-222.
Zhang Yuguo, Zhou Jian. Improvement of delay of polarization code serial cancellation decoding algorithm[J]. Application Research of Computers, 2019, 36(1): 220-222.

[3] 王晓蕾，林　青，戴吴骏. 一种低延迟极化码串行抵消译码器设计[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版)，2015，35(1)：52-55.
Wang Xiaolei, Lin Qing, Dai Wujun. Design of a low delay polarization code serial cancellation decoder[J]. J. of Nanjing University of Posts and Telecomm. (Natural Science Edi.), 2015, 35(1): 52-55.

[4] 邢　超. 低复杂度的极化码译码算法研究[D]. 南京：南京邮电大学，2019.
Xing Chao. Research on low complexity polarization code decoding algorithm[D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2019.

[5] Zhou Y, Lin J, Wang Z. Improved Fast-SSC-Flip decoding of polar codes[J]. IEEE Commun. Lett., 2019, 23(6): 950-953.

[6] 薛明浩，马林华，林志国，等. 基于 LDPC 码的调频抗干扰性能[J]. 计算机应用，2011，31(8)：2037-2039.
Xue Minghao, Ma Linhua, Lin Zhiguo, et al. Anti-jamming performance of frequency-hopping based on LDPC code[J]. Computer Application, 2011, 31(8): 2037-2039.

[7] Wu Daolong, Li Ying, Sun Yue. Construction and block error rate analysis of polar codes over AWGN channel based on Gaussian approximation[J]. IEEE Commun. Lett., 2014, 18(7): 1099-1102.

作者简介：

袁建国(1968－)，男，重庆市人，工学博士，教授，硕士生导师，主要从事通信系统中 LDPC 码与极化码的编译码技术和 OFDM 技术等方面的研究。