光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.2021.03.025

卫星激光通信中基于Zig-Zag结构的原模图QC-LDPC码构造方法

袁建国*，刘议靖，李志伟

（重庆邮电大学 光电信息感测与传输技术重庆市重点实验室，重庆 400065）

摘　要： 为应对卫星激光通信信道的时变性、改善传输的可靠性，提出一种基于Zig-Zag结构的原模图QC-LDPC码构造方法。该方法将原模图与Zig-Zag结构的移位系数设计方法相结合，构造校验矩阵围长至少为8且码长码率可灵活选择的ZZ-QC-LDPC码。仿真结果表明：该方法所构造的ZZ-QC-LDPC码在误码率为10^{-6}时，与同码率下基于等差数列和原模图构造的QC-LDPC码和基于最大公约数构造的QC-LDPC码以及具有大围长快速编码特性的QC-LDPC码相比，其净编码增益分别提高了约0.2，0.1和0.64 dB，且在较大码率范围内均具有良好的纠错性能。

关键词： Zig-Zag结构；原模图；QC-LDPC码；误码率；净编码增益

中图分类号： TN929.11　**文章编号：** 1001－5868(2021)03－0437－05

Construction of QC-LDPC Code Based on Zig-Zag Structure in Satellite Laser Communication

YUAN Jianguo，LIU Yijing，LI Zhiwei

（Chongqing Key Laboratory of Photoelectronic Information Sensing and Transmitting Technology，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，CHN）

Abstract： In order to improve the channel time-varying and the transmission reliability of satellite laser communications，a novel construction method of protograph quasi-cyclic low-density parity-check（QC-LDPC）codes based on the Zig-Zag（ZZ）structure is proposed. This construction method combines the protograph with the method of designing the shift coefficient of the Zig-Zag structure to construct the ZZ-QC-LDPC code with the check matrix of the girth-8 and the flexibly adjustable code-length code-rate. The simulation results show that under the same code-rate，the net coding gains of the ZZ-QC-LDPC code constructed by the proposed construction method，compared with the QC-LDPC code based on the arithmetic progression and protograph and the QC-LDPC code based on the greatest common divisor as well as the QC-LDPC code based on the large-girth fast encoding characteristics，can be improved by about 0.2，0.1 and 0.64 dB respectively at the bit error ratio of 10^{-6}，furthermore，the ZZ-QC-LDPC code has the more excellent error-correcting performance within the wider code-rate range.

Key words： Zig-Zag structure；protograph；QC-LDPC codes；bit error ratio；net coding gain

收稿日期：2021－02－01.

基金项目：国家自然科学基金项目(61971079)；2020年重庆市(重庆邮电大学)研究生科研创新项目.

* **通信作者：**袁建国

0 引言

卫星激光通信在未来的航天科技事业中将发挥越来越重要的作用，但其会受大气湍流、大气衰减、背景辐射等因素影响，极大地降低数据传输的可靠性。因而在强调信道编码的纠错能力时，还需根据信道的实时情况动态地调整码率，在不同的信道情况发送相应码率的码字，保证数据传输的可靠性。低密度奇偶校验(LDPC)码凭借其接近 Shannon 限的优点，已被广泛应用于卫星激光通信中[1-2]。但是在提高 LDPC 码性能的同时，其编码复杂度也相应被提高，从而导致实际应用中的资源浪费和成本增加。这样，准循环低密度奇偶校验(Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check，QC-LDPC)码被提出，它是 LDPC 码一个非常重要的子类[3]。其奇偶校验矩阵可以分成多个大小相等的方阵，每个方阵都是单位矩阵的循环移位矩阵或全 0 矩阵，非常便于存储器存储和寻址，从而大大降低了 LDPC 码的编译码复杂度，并且其具有重复累计结构，有利于硬件实现[4]。目前，结构化校验矩阵构造主要有代数几何、组合数学等方式，但是以上方式受限于特定结构，导致码长、码率选择不够灵活。为了兼顾码长、码率可灵活选择以及编码复杂度等问题，集随机构造与结构化构造优点的混合构造被提出，其中应用最为广泛的是基于原模图构造的 LDPC 码[5-6]。

针对卫星激光通信硬件资源有限、受干扰因素多、信息传输可靠性不稳定等特点，本文从构造码率、码长可灵活选取的 QC-LDPC 码角度出发，将原模图与 Zig-Zag 结构的移位系数设计方法相结合，提出一种基于 Zig-Zag 结构的原模图 QC-LDPC 码构造方法。通过该方法设计的 QC-LDPC 码具有结构简单、码长、码率可灵活选择、围长至少为 8 等优点。

1 原模图及 Zig-Zag 移位结构

1.1 原模图

原模图是 Tanner 图的一种特殊形式，其节点数量相对较少，且允许有重边，可表示为 $G=\{v,c,e\}$。其中 v 为变量节点数量，c 为校验节点数量，e 为变量节点与校验节点间相连的边的总和。原模图通过适当“复制-置换”可得到码率相同且没有重边的 Tanner 图。式(1)的原模图如图 1，该图包括 6 个变量节点 (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6)，4 个校验节点 (c_1,c_2,c_3,c_4)，以及 12 条边。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&1\end{bmatrix} \tag{1}$$

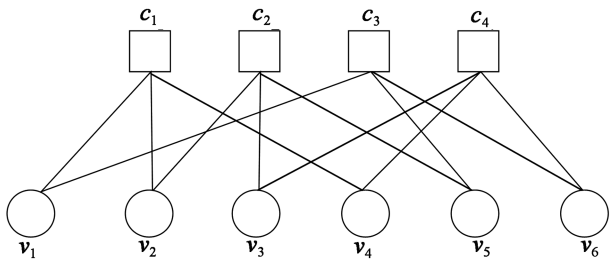


图 1 式(1)中校验矩阵的原模图

图 1 经过“复制-置换”后，可以得到更大的原模图，如图 2～3 所示，其中图 2 是对应的原模图复制 2 次之后的结果。将图 2 中两个原模图进行边的置换，建立起两个原模图之间的联系得到图 3，图 3 中的派生图可由式(2)中的校验矩阵 $\boldsymbol{P}$ 表示：

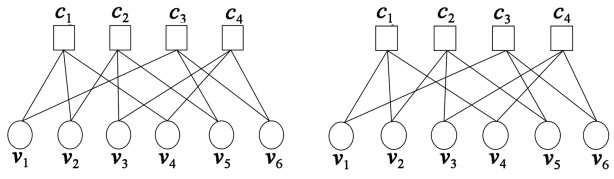


图 2 原模图复制 2 次后的结果

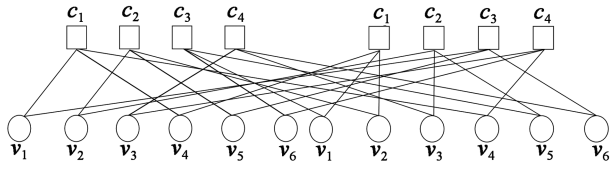


图 3 派生图

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{14}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{A}_{23}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{25}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{35}&\boldsymbol{A}_{36}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{43}&\boldsymbol{A}_{44}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_{46}\end{bmatrix} \tag{2}$$

$\boldsymbol{P}$ 也称为移位系数子矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 2×2 的循环置换矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 中每一行均是其上一行经过循环位移得到。构造置换矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是构造校验矩阵的关键，本文将从原模图扩展展开。

1.2 Zig-Zag 移位结构

由于循环移位系数会对 LDPC 码的性能产生较大影响，因此，选择合理的移位系数是构造出性能优异 QC-LDPC 码的重要前提。

文献[7]提出了一种利用简单数学表达公式得到的循环移位系数，该表达式所设计的置换矩阵具

有 Zig-Zag 型结构，称为 Zig-Zag 移位系数设计法。该方法具有一般性，置换矩阵大小可灵活选取，且无需计算机搜索便能完全避免 4 环。其定义如下：

若式(3)所示移位系数子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的移位系数 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 由表达式(4)计算决定，则称具有该结构的移位系数子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为 Zig-Zag 形结构移位系数子矩阵。

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1K}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2K}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{J1} & \boldsymbol{A}_{J2} & \boldsymbol{A}_{J3} & \cdots & \boldsymbol{A}_{JK}\end{bmatrix}_{JK} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{cases}j, & i=1,\quad 1\leqslant j\leqslant K\\ (K+1)+[(i+1+j+1)^2-9(i+1)-\\ 7(j+1)+16]\times\dfrac{1}{2}, & 2\leqslant i\leqslant J,1\leqslant j\leqslant K\end{cases} \tag{4}$$

2　基于 Zig-Zag 结构的 QC-LDPC 码

本文构造 QC-LDPC 码校验矩阵的步骤为先生成具有 Zig-Zag 结构的循环移位子矩阵，再将原模图基矩阵与该子矩阵相结合。根据文献[8]提到的分部构造，本文设计的循环移位子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分为上下两部分，所得校验矩阵大小为 $3N\times nN$，其中 $n>5$。规定在设计的循环移位子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中，元素 0 表示 $N\times N$ 的单位矩阵，其余元素由 $N\times N$ 的单位阵循环右移相应位数构成。$\boldsymbol{P}$ 的构造结构如式(5)所示：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_a\\ \boldsymbol{H}_b\end{bmatrix} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{H}_a$ 为行数为 2、列数为 n 的矩阵，$\boldsymbol{H}_b$ 为行数为 1、列数为 n 的矩阵。下面将详细介绍 $\boldsymbol{H}_a$，$\boldsymbol{H}_b$ 的具体构造方法。

2.1　$\boldsymbol{H}_a$ 的构造方法

采用式(4)所示的 Zig-Zag 移位系数构造方法来构造矩阵 $\boldsymbol{H}_a$，该方法可简单、灵活地选择矩阵的长度和置换矩阵移位系数。

其原理为在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中选择 4 个元素 A_{ij}，A_{it}，A_{ft} 和 A_{fj}，通过式(6)计算：

$$A_{it}-A_{ij}+A_{fj}-A_{ft}=\frac{(2i+t-2)(t-1)}{2}-\frac{(2i+j-2)(j-1)}{2}+\frac{(2f+j-2)(j-1)}{2}-\frac{(2f+t-2)(t-1)}{2}=\delta_{\text{row}}\delta_{\text{col}} \tag{6}$$

式(6)中，$1\leqslant\delta_{\text{row}}\delta_{\text{col}}\leqslant(K-2)(J-1)$，$i-f=\delta_{\text{row}}$，$t-f=\delta_{\text{col}}$，若扩展因子 N 满足 $N\neq r(\delta_{\text{row}},\delta_{\text{col}})$，$r$ 的取值可以是任意的正整数，即可生成避免 4 环的循环位移子矩阵。

用该方法生成 $J=K=5$ 的移位系数子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 如式(7)所示，该移位子矩阵生成的校验矩阵没有 4 环。

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 6 & 8 & 11 & 15 & 20\\ 7 & 10 & 14 & 19 & 25\\ 9 & 13 & 18 & 24 & 31\\ 12 & 17 & 23 & 30 & 38\end{bmatrix} \tag{7}$$

2.2　$\boldsymbol{H}_b$ 的构造方法

因矩阵 $\boldsymbol{H}_b$ 的大小为 $1\times n$，所以也可以将 $\boldsymbol{H}_b$ 看成一个长度为 n 的一维数组。由于矩阵 $\boldsymbol{H}_a$ 的构造已经能够避免 4 环，因此只需要避免在引入 $\boldsymbol{H}_b$ 时与已经构造好的矩阵构成 4，6 环。

定理 1[9]：$(a_1,a_2,\cdots,a_{2l-1},a_{2l})$ 为循环移位子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的元素，元素 a_i 和 a_{i+1} 在相同行或相同列，而 a_i 和 a_{i+2} 在不同行且不同列。若存在最小正整数 r 使式(8)成立，那么由元素 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2l-1},a_{2l})$ 扩展构成的校验矩阵存在长度为 $2lr$ 的环。

$$r\cdot\sum_{i=1}^{2l}(-1)^{i-1}a_i\equiv 0\ \bmod N \tag{8}$$

式(8)中，N 为扩展因子，已知循环移位子矩阵尺寸为 $3\times n$，$0\leqslant i<k<j\leqslant 2$，$0\leqslant s,t,r\leqslant n-1$，那么由定理 1 可知，校验矩阵存在 4 环的条件是满足式(9)：

$$(\boldsymbol{P}(i,t)+\boldsymbol{P}(j,s))-(\boldsymbol{P}(i,s)+\boldsymbol{P}(i,t))\neq 0 \tag{9}$$

同理，若构造的校验矩阵不存在 6 环，则循环移位子矩阵元素需要满足式(10)：

$$(\boldsymbol{P}(i,t)+\boldsymbol{P}(j,s)+\boldsymbol{P}(k,r))-(\boldsymbol{P}(i,t)+\boldsymbol{P}(j,s)+\boldsymbol{P}(k,t))\neq 0 \tag{10}$$

将 $\boldsymbol{H}_a$ 与 $\boldsymbol{H}_b$ 组合之后，可能产生的 4，6 环均与第三行元素有关，其可能存在一种形式的 4 环，六种形式的 6 环，分别如图 4 与图 5 所示。

图 4 与图 5 中圆点对应循环移位子矩阵中的元素，以实心圆点为起点，顺时针或者逆时针将相邻元素相加、到下一个相邻元素进行相减，依次循环，直到将所有元素遍历完后，如果最终结果均不为 0，则表示以该循环位移子矩阵设计的校验矩阵围长至少为 8。构造矩阵 $\boldsymbol{H}_b$ 的步骤如下：

(1)确定 $\boldsymbol{H}_b$ 中第一个元素 A_{31}，A_{31} 是一个随机正整数。

(2)确定 $\boldsymbol{H}_b$ 中第二个元素 A_{32}。添加元素 A_{32}，并以其作为实心起点，则可能构成图 4 所示 4 环，以及图 5 所示 6 环(d)、(f)。因此，随机选择一个正整数 A_{32} 作为实心起点，对可能出现的环型进行遍历，排除可能构成 4，6 环的元素，最终确定第二个元素 A_{32}。

(3)确定 $\boldsymbol{H}_b$ 中第三个元素 A_{33}。添加元素 A_{33}，并以其作为实心起点，则图 4、图 5 所示的环均可能出现。因此，随机选择一个正整数 A_{33} 作为实心起点，对所有可能出现的环类型进行遍历，排除可能构成 4，6 环元素，最终确定第三个元素 A_{32}。

(4)以此类推，若需确定元素 A_{3k}，则需先随机确定一个正整数 A_{3k} 作为起点，逐次遍历排除可能构成的 4，6 环。采用如上所述的遍历方式选择出所有合适的元素 A_{3n}。

将上述方式构造的循环移位子矩阵用于构造循环校验矩阵，可使得循环校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 不存在 4，6 环，且码长、码率可灵活选取。

$$\boldsymbol{H}_b=\begin{cases}[448\quad 248\quad 491\quad 269\quad 210\quad 338]_{R=\frac{1}{2}}\\ [132\quad 57\quad 182\quad 347\quad 171\quad 179\quad 349]_{R=\frac{4}{7}}\\ [166\quad 83\quad 40\quad 133\quad 34\quad 117\quad 194\quad 46\quad 193]_{R=\frac{2}{3}}\\ [403\quad 82\quad 218\quad 399\quad 481\quad 333\quad 468\quad 344\quad 382\quad 204\quad 28]_{R=\frac{8}{11}}\\ [328\quad 421\quad 244\quad 453\quad 441\quad 107\quad 395\quad 99\quad 85\quad 85\quad 159\quad 284\quad 426\quad 500\quad 137]_{R=\frac{4}{5}}\end{cases} \tag{11}$$

集合{1/2，4/7，2/3，8/11，4/5}进行仿真分析。各码率循环位移子矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的前两行 $\boldsymbol{H}_a$ 由式(4)计算得出，第三行 $\boldsymbol{H}_b$ 如式(11)所示：

仿真采用加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise，AWGN)信道，二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying，BPSK)调制，置信传播(Belief Propagation，BP)译码，译码迭代为 50 次。对信息位为 1536，码率 R 集合为{1/2，4/7，2/3，8/11，4/5}的 Zig-Zag-QC-LDPC 码，以下简称 ZZ-QC-LDPC 码，分别进行仿真分析，结果如图 6 所示。可知，码率集合中每个码率对应的码字都具有良好的纠错性能与瀑布区性能且没有出现错误平层。

为验证单个码率码字的纠错性能，将本文构造的码率为 0.5 且信息位为 1536 的 ZZ-QC-LDPC 码，与文献[10-12]中同码率、同信息位的 QC-LDPC 码进行仿真分析，结果如图 7 所示。可以看出，本文

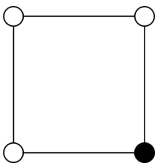


图 4 一种形式的 4 环

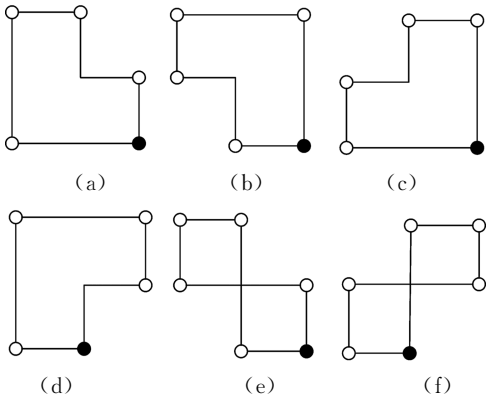


图 5 六种形式的 6 环

3 仿真结果分析

利用本文构造方法可以构造码率从 1/2 至 4/5 之间 10 个码率，本文选取其中 5 个较为常见的码率构造的 ZZ-QC-LDPC 码在信噪比为 1.8 dB 之前纠错性能略低于其他码型，但该码瀑布区性能优异。随着信噪比增加，在误码率为 10^{-6} 时，相较于其他码型，其净编码增益分别提高了约 0.2，0.1 和 0.64 dB，且未出现错误平层。

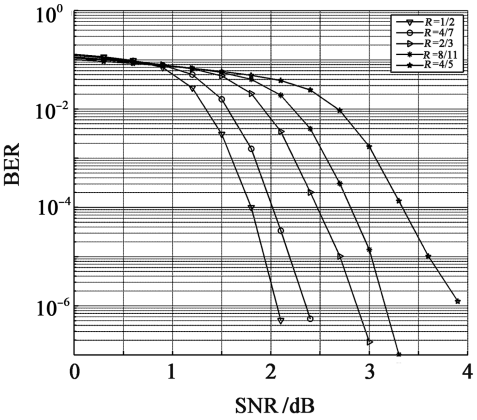


图 6 不同码率下 ZZ-QC-LDPC 码的仿真图

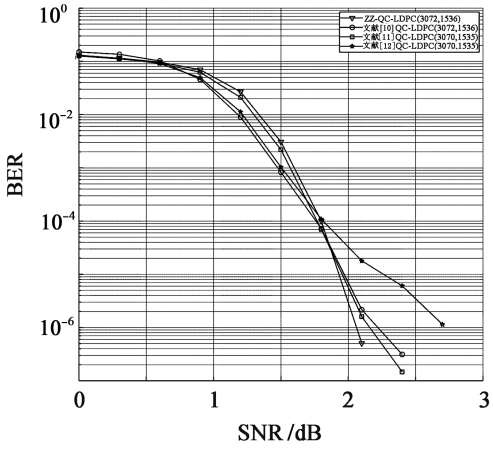


图 7　码率为 0.5 的 ZZ-QC-LDPC 码与其他码仿真对比图

综合上述分析可知，利用本文提出的构造方法所构造的 ZZ-QC-LDPC 码型在较大码率范围内具有良好的纠错性能，且相较于其他几种码型，在高信噪比下具有更好的纠错性能且没有出现错误平层现象。

4　结束语

本文结合原模图与 Zig-Zag 结构的循环移位系数设计法，提出了一种基于 Zig-Zag 结构的原模图 QC-LDPC 码新颖扩展构造方法。该方法在 Zig-Zag 循环移位子矩阵中，充分融合了原模图结构简单、设计灵活等优点，所设计的 QC-LDPC 码围长至少为 8，且码长、码率可灵活选取。此设计方法能构造出不同码率、码长且具有良好纠错性能的 QC-LDPC 码型，适用于信道时变性强的卫星激光通信，可改善卫星激光通信数据传输可靠性，具有一定的研究参考价值。

参考文献：

[1] Wang B, Chen P, Fang F, et al. The design of vertical RS-CRC and LDPC code for ship-based satellite communications on-the-move[J]. IEEE Access, 2019, 7: 44977-44986.

[2] Wang P, Yin L, Lu J. Efficient helicopter-satellite communication scheme based on check-hybrid LDPC coding [J]. Tsinghua Science and Technol., 2018, 23(3): 103-112.

[3] Xu H, Feng D, Luo R, et al. Construction of quasi-cyclic LDPC codes via masking with successive cycle elimination[J]. IEEE Communications Lett., 2016, 20(12): 2370-2373.

[4] Hu J, Baldi M, Santini P, et al. Lightweight key encapsulation using LDPC codes on FPGAs[J]. IEEE Trans. on Computers, 2020, 69(3): 327-341.

[5] Zheng Demeng, Yuan Jianguo, Wang Hongsen, et al. A new construction method of QC-LDPC codes with low error floor based on EETS and Zig-Zag[J]. Optoelectron. Lett., 2019, (15): 292-296.

[6] 王志娜，肖　旻，王　琳. 码率自适应原模图 LDPC 码的设计[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2012，24(1)：55-59.
Wang Zhina, Xiao Min, Wang Lin. Design of rate-compatible protograph LDPC codes[J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edi.), 2012, 24(1): 55-59.

[7] 郭　锐，胡方宁，刘济林. 深空通信中高性能低复杂度的 QC-LDPC 码构造方法[J]. 空间科学学报，2012，32(4)：567-574.
Guo Rui, Hu Fangning, Liu Jilin. A class of QC-LDPC codes with high performance and low complexity in deep space communication[J]. Chinese J. of Space Science, 2012, 32(4): 567-574.

[8] 袁建国，张希瑞，袁财政，等. 可见光通信中一种围长为 8 的 QC-LDPC 码构造方法[J]. 半导体光电，2019，40(6)：857-861.
Yuan Jianguo, Zhang Xirui, Yuan Caizheng, et al. A construction method of QC-LDPC code with girth-8 in visible light communication[J]. Semiconductor Optoelectronics, 2019, 40(6): 857-861.

[9] Tasdighi A, Banihashemi A H, Sadeghi M R. Symmetrical constructions for regular girth-8 QC-LDPC codes[J]. IEEE Trans. on Communications, 2017, 65(1): 14-22.

[10] 袁建国，孙乐乐，范福卓，等. 基于等差数列与原模图的 QC-LDPC 码构造方法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2019，31(5)：649-654.
Yuan Jianguo, Sun Lele, Fan Fuzhuo, et al. Construction method of QC-LDPC codes based on the arithmetic progression and protograph [J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edi.), 2019, 31(5): 649-654.

[11] Wang R, Li Y, Zhao H, et al. Construction of girth-eight quasi-cyclic low-density parity-check codes with low encoding complexity [J]. IET Communications, 2016, 10(2): 148-153.

[12] 冯志宇，彭海英，郭振勇，等. 大围长可快速编码 QC-LDPC 码的构造[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2018，30(4)：498-504.
Feng Zhiyu, Peng Haiying, Guo Zhenyong, et al. Construction of large girth QC-LDPC codes for fast encoding[J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edi.), 2018, 30(4): 498-504.

作者简介：

袁建国(1968—)，男，重庆人，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为光通信系统中 FEC 编译码技术与 OFDM 技术。