光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.2022011305

卫星激光通信中基于 Fibonacci 数列与 GCD 序列的非规则 QC-LDPC 码构造方法

袁建国*，刘议靖，张育宁，蒯家松

（重庆邮电大学 光电信息感测与传输技术重庆市重点实验室，重庆 400065）

摘　要： 为提高卫星激光通信系统的可靠性，节约其硬件资源，提出一种基于斐波那契(Fibonacci)数列与最大公约数(GCD)序列的非规则准循环低密度奇偶校验(Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check，QC-LDPC)码构造方法。该方法通过由 Fibonacci 数列与 GCD 序列组合构造的循环移位矩阵扩展原模图基矩阵，从而得到校验矩阵。所构造的校验矩阵围长至少为 6 且码长码率可灵活选择，需存储元素少，利于硬件实现，较适用于卫星激光通信系统。仿真结果表明，采用该方法构造的非规则 QC-LDPC 码与相同码率码长的基于完备差集的非规则 Type-I QC-LDPC 码、基于消除陷阱集的有限长度非规则 FL-QC-LDPC 码、基于 GCD 可快速编译的非规则 GL-QC-LDPC 码以及基于矩阵扩展的非规则 RC-LDPC 码相比，其净编码增益均有一定提高。

关键词： 斐波那契；最大公约数；准循环低密度奇偶校验码；误码率；净编码增益

中图分类号： TN929.11　**文章编号：** 1001－5868(2022)03－0592－05

A Construction Method of QC-LDPC Codes Based on Fibonacci Sequence and GCD Sequence for Satellite Laser Communications

YUAN Jianguo, LIU Yijing, ZHANG Yuning, KUAI Jiasong

(Chongqing Key Laboratory of Photoelectronic Information Sensing and Transmitting Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, CHN)

Abstract: A novel construction method of the irregular quasi-cyclic low-density parity-check (QC-LDPC) based on Fibonacci and greatest common divisor (GCD) is proposed to improve the reliability of the satellite laser communication systems and save the hardware resources of the satellite laser communication system. The construction method expands the protograph basic matrix by means of the cyclic shift matrix constructed by the combination of the Fibonacci sequence and GCD sequence to obtain the parity check matrix. The girth of the constructed parity check matrix is at least 6 and the code length and rate can flexibly be selected. It requires the less storage element, which is beneficial to the hardware implementation. Therefore, the novel construction method can better be suitable for satellite laser communication systems. The simulation results show that compared with the irregular type-I QC-LDPC code based on the complete difference sets, the finite-length irregular FL-QC-LDPC code based on the elimination of the trapping sets, the fast-compiled irregular GL-QC-LDPC code based on the GCD and the irregular RC-LDPC code based on the matrix expansion with the same code-rate and code-length, the net coding gain of the irregular QC-LDPC code constructed by this novel construction method can be improved to a certain extent.

Key words: Fibonacci; greatest common divisor; quasi-cyclic low-density parity-check codes; bit error ratio; net coding gain

收稿日期：2022－01－13.

基金项目：国家自然科学基金项目(61971079).

* **通信作者：**袁建国　**E-mail:** yyyyjg@126.com

0 引言

卫星激光通信系统因其体积小、功率大、保密性高等优点而被各国重点研究。激光的单色性好、直射性和抗干扰能力强，但其容易受大气湍流和背景辐射等因素影响，导致数据传输的可靠性与有效性降低。因而在强调信道编码的纠错能力时，还需根据信道的实时情况动态地调整码率，在不同信道情况发送相应码率的码字，提高数据传输的有效性，保证数据传输的可靠性。准循环低密度奇偶校验(QC-LDPC)码因其接近香农限且硬件实现方便的优点，已被广泛应用[1]。

根据构造方式不同，校验矩阵主要分为两类：随机校验矩阵和结构化校验矩阵。目前，经典的随机校验矩阵主要有 Gallager，MacKay，PEG(Progressive Edge Growth)等构造方式。随机构造的校验矩阵非零元素排列不具有规律性，无法实现简单编译码，硬件实现较为复杂。结构化构造校验矩阵主要有代数几何、组合数学等方式，虽然构造方式简单，但是以上方式受限于特定结构，导致码长、码率选择不够灵活，在传输受限的信道中通信效果并不理想。为了兼顾码长、码率可灵活选择以及编码复杂度等问题，结合随机构造与结构化构造优点的原模图 QC-LDPC 码被广泛研究[2-3]。原模图 QC-LDPC 码不仅能灵活构造码长码率，而且易于硬件实现，根据算法可搜索得到性能优异的原模图基矩阵，利用移位系数矩阵对基矩阵扩展可得到码率码长选取灵活的校验矩阵。

针对卫星激光通信系统的硬件资源有限、干扰因素多、信息传输有效性不稳定等特点，本文从构造码率、码长可灵活选取的 QC-LDPC 码角度出发，将斐波那契(Fibonacci)数列与最大公约数(GCD)序列以及原模图基矩阵的扩展进行结合，提出一种新颖的非规则 QC-LDPC 码构造方法。通过该方法设计的 QC-LDPC 码具有结构简单，码长、码率可灵活选择且错误平层低等优点。

1 原模图及 QC-LDPC 码简介

1.1 原模图

原模图是 Tanner 图中的一种特殊形式，相比较标准 Tanner 图，原模图的节点数量相对较少，且原模图的节点之间连线允许有多重，可用表达式 $G=\{v,c,e\}$ 表示[3]。其中 v,c,e 分别用来表示变量节点、校验检点以及节点间连线的数量。原模图通过适当“复制-置换”操作可得到码率相同且没有重边的 Tanner 图[4]。Tanner 图上，从某个节点出发经过边、点又回到该节点，这个过程被称为循环，且从出发到返回同一节点所经历的边的数目称为循环长度，也称为围长，其中最小围长为该校验矩阵的环(Girth)。

国际空间数据系统咨询委员会(Consultative Committee for Space Data System，CCSDS)将原模图 LDPC 码作为深空应用标准，指出码率集合范围约包括 0.5 和 0.8 的码[5]。2007 年，CCSDS 提出了一种累加-重复-累加码(Accumulate-Repeat-Accumulate，ARA)的改进形式 ARJA(Accumulate-Repeat-Jagged-Accumulate)码，并将 AR4JA(Accumulate-Repeat-4-Jagged-Accumulate)码族作为深空通信的标准。如图 1 所示为码率 1/2 的 AR4JA 码原模图，式(1)为对应的基矩阵。

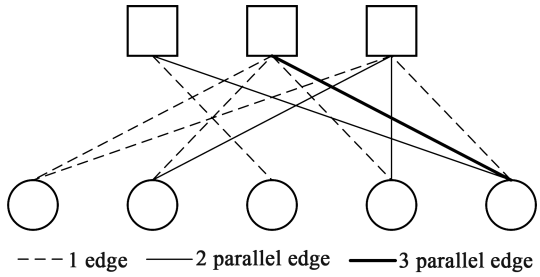

图 1 码率 1/2 的 AR4JA 码原模图

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&2\\1&1&0&1&3\\1&2&0&2&1\end{bmatrix} \tag{1}$$

1.2 QC-LDPC 码

准循环码是一种分组码，码型具有部分对称结构，向左移动或是向右移动均会得到另一个码字。具有准循环结构的 LDPC 码被称为 QC-LDPC 码，准循环结构使得其编译码简单，使用移位寄存器便能实现[5]。QC-LDPC 码的奇偶校验矩阵由循环置换矩阵(CPM)扩展基矩阵得到，循环置换矩阵包括单位阵、单位阵的移位矩阵以及零矩阵。移位系数矩阵可用来表示循环置换矩阵移位系数，其形式如式(2)所示：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}(a_{1,1})&\boldsymbol{I}(a_{1,2})&\cdots&\boldsymbol{I}(a_{1,j})\\\boldsymbol{I}(a_{2,1})&\boldsymbol{I}(a_{2,2})&\cdots&\boldsymbol{I}(a_{2,j})\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{I}(a_{i,1})&\boldsymbol{I}(a_{i,2})&\cdots&\boldsymbol{I}(a_{i,j})\end{bmatrix}_{i\times j} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{I}(a_{i,j})$是大小为 $N\times N$ 的循环置换矩阵，N 为校验矩阵扩展系数，$a_{i,j}\in\{0,1,\cdots,N-1,\infty\}$，当 $a_{i,j}=0$ 时，$\boldsymbol{I}(a_{i,j})$ 为单位阵；当 $a_{i,j}=\infty$ 时，$\boldsymbol{I}(a_{i,j})$为零矩阵；$a_{i,j}\neq 0$ 且 $a_{i,j}\neq\infty$时，$\boldsymbol{I}(a_{i,j})$为单位矩阵循环移动相应位次所得的矩阵。

QC-LDPC 码根据校验矩阵中每行每列非零元素的个数不同可分为规则 QC-LDPC 码与非规则 QC-LDPC 码。如果校验矩阵各行中非零元素的个数相同，各列的非零元素个数也相同，这样的 QC-LDPC 码称为规则 QC-LDPC 码。与之相反地，各行非零元素个数不同，或者各列非零元素个数不同，则称为非规则 QC-LDPC 码。虽然规则 QC-LDPC 码较非规则 QC-LDPC 码更易于硬件实现，但设计良好的非规则 QC-LDPC 码的纠错性能优于规则 QC-LDPC 码。因此，本文将基于原模图构造适用于卫星激光通信系统的非规则 QC-LDPC 码。

2 非规则 QC-LDPC 码新的构造方法

本文首先构造性能优异的原模图基矩阵，该基矩阵的设计保证扩展后的奇偶校验矩阵具有非规则特性；其次是利用 Fibonacci 数列和最大公约数(Greatest Common Divisor，GCD)序列结合构造循环移位矩阵；最后采用构造的循环移位矩阵扩展基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 得到性能优异的非规则 QC-LDPC。

2.1 构造基矩阵

原模图基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的大小为 $4\times n$，n 为变量节点的个数，基矩阵的构造步骤如下：

步骤 1：基矩阵最左侧大小为 4×4 的矩阵，其主对角线为元素∞，对角线以下元素为∞与 1 交替出现，实现变量节点与校验节点的折中。

步骤 2：根据码率码长灵活选择变量节点 n，除步骤 1 中元素∞，其余元素均为 1。

步骤 3：为进一步提升所构造码字的纠错性能，基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 最右侧大小为 4×4 的矩阵，对角线元素用 0 代替，增加变量节点与校验节点之间的关联。

此设计方法构造的基矩阵扩展得到的奇偶校验矩阵具有非规则特性。本文设计的原模图基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的结构如式(3)所示：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\infty & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \infty & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \infty & \cdots & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{4\times n} \tag{3}$$

2.2 构造移位系数矩阵

移位系数矩阵的结构与 LDPC 码纠错性能息息相关，采用代数方法构造移位矩阵方法简单，易于存储，是目前构造移位系数矩阵的常用方式。文献[6]中提出了一种改进的最大公约数 GCD 算法，通过该算法可以构造得到整个基矩阵的移位系数矩阵，但该算法较为复杂且当基矩阵的变量节点 n 增大时，循环置换矩阵的扩展系数 N 也随之增大，导致计算复杂度增加过快。数列结合构造的方式可使循环置换矩阵的最小扩展系数增加变慢。

本文采用数列结合的方式构造移位系数矩阵，将文献[6]中通过 GCD 算法得到的一组递增序列 $a_i(1,10,11,23,24,\cdots)$与 Fibonacci 数列 F_r 相乘得到移位数值 a_iF_r，F_r 的前几项为(0,1,1,2,3,5,8,…)。为满足校验矩阵元素递增，F_r 从第二个元素 1 开始取，Fibonacci 元素个数与基矩阵变量节点个数相同，GCD 序列元素个数与校验节点个数相同，根据不同码率灵活选取。经循环置换矩阵扩展得到校验矩阵结构如式(4)所示，其中$m=4$，n 的取值根据码率决定。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\infty & a_0\times F_1 & \cdots & a_0\times F_{n-m} & 0 & a_0\times F_{n-m+2} & a_0\times F_{n-2} & a_0\times F_{n-1}\\ a_1\times F_0 & \infty & \cdots & a_1\times F_{n-m} & a_1\times F_{n-m+1} & 0 & a_1\times F_{n-2} & a_1\times F_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m-1}\times F_0 & \infty & \cdots & \infty & a_{m-1}\times F_{n-m+1} & a_{m-1}\times F_{n-m+2} & \cdots & 0\end{bmatrix}_{m\times n} \tag{4}$$

该构造方法的优点：采用 GCD 算法得到的序列与 Fibonacci 数列结合构造移位系数矩阵，不仅计算简单，所需存储空间少，而且避免了因原模图节点 n 增大带来的扩展系数 N 增大过快的情况。

2.3 围长分析

定理 1[7]：$(a_1,a_2,\cdots,a_{2l-1},a_{2l})$为移位系数矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的元素，元素 a_i 和 a_{i+2} 在相同行或相同列，而 a_i 和 a_{i+2} 在不同行且不同列。若存在最小正整数 r 使式(5)成立，那么由元素 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2l-1},a_{2l})$扩展构成的校验矩阵存在长度为 $2lr$ 的环。

$$r\cdot\sum_{i=1}^{2l}(-1)^{i-1}a_i\equiv 0\bmod N \tag{5}$$

$$(P(i,t)+P(j,s))-(P(i,s)+P(j,t))\neq 0 \tag{6}$$

由此可知，若构造校验矩阵满足不含 4 环，移位系数矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中元素必须满足式(6)，其中 $0 \leqslant i < j \leqslant m-1, 0 \leqslant s, t \leqslant n-1$。$P(i,t)$和$P(i,s)$分别是基矩阵中第 i 行的第 t 列和第 s 列元素，$P(j,t)$和$P(j,s)$分别是基矩阵中第 j 行的第 t 列和第 s 列元素。如式(7)所示，$\boldsymbol{M}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 中的任意二阶子式。

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_{i,s} & a_{i,t} \\ a_{j,s} & a_{j,t} \end{bmatrix} \tag{7}$$

本文中扩展系数的取值 $N \geqslant a_{m-1}F_{n-2}+1$，假设本文 $\boldsymbol{P}$ 中存在 4 环，分下面几种情况说明：

(1)若 $\boldsymbol{M}$ 中含有元素∞：∞代表零阵，若 $\boldsymbol{M}$ 中含有∞，则不会造成 4 环。

(2)若 $\boldsymbol{M}$ 中不含有元素∞与元素 0：根据文献[10]中 GCD 算法与环存在定理，当 $N \geqslant (a_i - a_j)(F_t - F_s)+1$ 时，$a_{i,s}-a_{j,s}+a_{j,t}-a_{i,t}=(a_{j,t}-a_{j,s})-(a_{i,t}-a_{i,s})=a_j(F_t-F_s)+a_i(F_t-F_s)=(a_j-a_i)(F_t-F_s)\neq 0(\mathrm{mod}N)$。

因此不存在 4 环，与假设不成立。

(3)若 $\boldsymbol{M}$ 中存在元素 0：根据 0 元素所在位置不同，可以分为以下三种情况。

情况一：如式(8)所示：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_{i,s} & 0 \\ a_{j,s} & a_{j,t} \end{bmatrix} \tag{8}$$

由式(5)可知，$a_{i,s}-a_{j,s}+a_{j,t}-0=a_j(F_t-F_s)+a_iF_s<a_jF_t-a_iF_s\neq 0(\mathrm{mod}N)$，所以不存在 4 环。

情况二：如式(9)所示：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0 & a_{i,t} \\ a_{j,s} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

同理，$a_{i,t}-0+a_{j,s}-0=a_jF_s+a_iF_t\neq 0(\mathrm{mod}N)$，所以不存在 4 环。

情况三：如式(10)所示：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} a_{i,s} & a_{i,t} \\ 0 & a_{j,t} \end{bmatrix} \tag{10}$$

同理，$a_{i,s}-0+a_{j,t}-a_{j,s}=a_iF_s+(a_j-a_i)F_t<a_jF_t-a_iF_s\neq 0(\mathrm{mod}N)$，$N \geqslant a_{m-1}F_{n-2}+1$，也不存在 4 环。

综上所述，本文构造方法所构造的 QC-LDPC 码能够完全避免 4 环。

3 仿真结果分析

为满足卫星激光通信系统的应用要求，本文提出了一种码长码率可灵活选择的非规则 QC-LDPC 码构造方法。为验证单个码率码字的纠错性能，本文构造了码率为 0.5、码长为 2 400 的 QC-LDPC 码。采用上述构造方法，将由 GCD 算法得到的序列 $a_i(1,10,11,23)$与 Fibonacci 数列 $F_r(1,1,2,3,5,8,13,21)$相乘，取扩展系数 $N=300$。其校验矩阵如式(11)所示。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \infty & 1 & 2 & 3 & 0 & 8 & 13 & 21 \\ 10 & \infty & 20 & 30 & 50 & 0 & 130 & 210 \\ \infty & 11 & \infty & 33 & 55 & 88 & 0 & 231 \\ 23 & 23 & 46 & \infty & 115 & 184 & 299 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

本文仿真采用加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise，AWGN)信道，二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying，BPSK)调制，置信传播(Belief Propagation，BP)译码，译码迭代 50 次。仿真结果对比分析如图 2 所示。在相同码率码长情况下，本文构造的非规则 QC-LDPC 码在误码率为 10^{-6} 时，与文献[8]中基于消除陷阱集的有限长度非规则 FL-QC-LDPC(2400,1200)码，文献[1]中基于完备差集的非规则 Type-I QC-LDPC(2400,1200)码，文献[9]中基于 GCD 算法的一种可快速编译的非规则 GL-QC-LDPC(2400,1200)码相比，其净编码增益分别提高了约 0.2，0.2 和 0.08 dB。本文构造的非规则 QC-LDPC 码纠错性能良好，未出现明显错误平层。

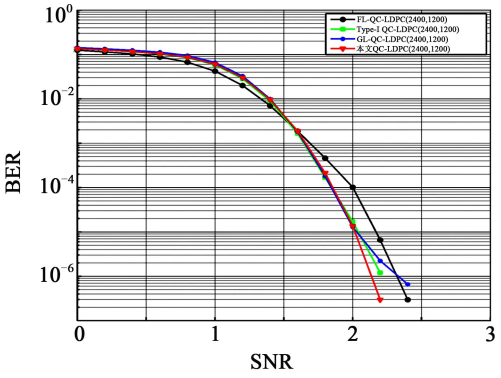

图 2　码率为 0.5 的 QC-LDPC(2400,1200)码与其他码的仿真对比图

为进一步说明该码组的码长码率可灵活选取，本文给出码率为 0.6、码长为 7 830 的非规则 QC-LDPC 码，其中 Fibonacci 数列 F_r 取(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55)，序列 a_i 保持不变，取扩展系数 $N=783$，其校验矩阵如式(12)所示。

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\infty & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 21 & 34 & 55\\ 10 & \infty & 20 & 30 & 50 & 80 & 130 & 0 & 340 & 550\\ \infty & 11 & \infty & 33 & 55 & 88 & 143 & 231 & 0 & 605\\ 23 & 23 & 46 & \infty & 115 & 184 & 299 & 483 & 782 & 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

如图 3 所示，在相同码率码长情况下，本文构造的非规则 QC-LDPC 码在误码率为 10^{-7} 时，相比文献[1]构造的 Type-I QC-LDPC(7830，4698)码与文献[4]基于矩阵扩展构造的非规则 RC-LDPC(7830，4698)码，净编码增益分别提高了约 0.12 与 0.18 dB。本文构造的 QC-LDPC 码具有良好的瀑布区，纠错性能良好。

综上分析可知，利用本文提出的构造方法所构造的非规则 QC-LDPC 码的码率选择灵活，构造方法简单，仅需存储简单的数列与原模图基矩阵便可扩展得到校验矩阵，码型具有良好的纠错性能，且相较于其他几种码型，在高信噪比下具有更好的纠错性能且没有出现错误平层现象。

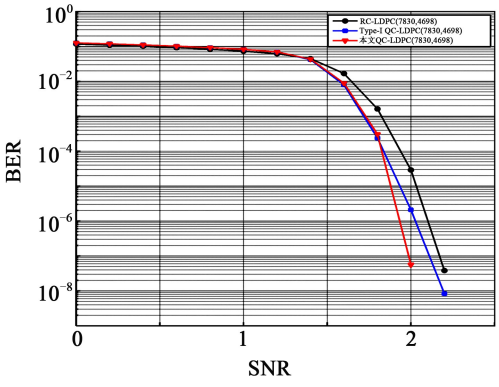

图 3 码率为 0.6 的 QC-LDPC(7830，4698)码与其他码的仿真对比图

4 结论

本文针对卫星激光通信系统受大气湍流等因素影响，信号传输不稳定，通信可靠性降低的问题，设计了一种结构新颖的非规则 QC-LDPC 码的构造方法。该方法通过由 Fibonacci 数列与 GCD 序列组合构造的循环移位矩阵得到循环置换矩阵，再采用循环置换矩阵扩展原模图基矩阵得到其奇偶校验矩阵，使校验矩阵围长至少为 6。该方法简单方便，只需要存储 Fibonacci 数列与 GCD 序列以及原模图基矩阵，数据存储量小，在很大程度上节约了系统的存储空间。该构造方法能够灵活选择码长码率，码型纠错性能优异，较适用于卫星激光通信系统。

参考文献：

[1] 黄 胜，宋 静，袁建国. 基于完备循环差集的 QC-LDPC 码的确定性构造[J]. 半导体光电，2017，38(6)：844-848.
Huang S，Song J，Yuan J G. Deterministic construction of QC-LDPC codes based on perfect cyclic difference sets[J]. Semiconductor Optoelectronics，2017，38(6)：844-848.

[2] Dai J，Tan K，Si Z，et al. Learning to decode protograph LDPC codes[J]. IEEE J. on Sel. Areas in Communications，2021，39(7)：1983-1999.

[3] 袁建国，孙乐乐，范福卓，等. 基于等差数列与原模图的 QC-LDPC 码构造方法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2019，31(5)：649-654.
Yuan J，Sun L，Fan F，et al. Construction method of QC-LDPC codes based on the arithmetic progression and protograph [J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecomm. (Natural Science Edi.)，2019，31(5)：649-654.

[4] 袁建国，袁雅琴，刘议靖. 卫星激光通信中一种基于矩阵扩展的 RC-LDPC 码构造方法[J]. 半导体光电，2020，41(6)：879-883.
Yuan Jianguo，Yuan Yaqin，Liu Yijing. A construction method of RC-LDPC codes based on the matrix extension for satellite laser communications [J]. Semiconductor Optoelectronics，2020，41(6)：879-883.

[5] 卫 霞，张文俊. QC-eIRA 码的构造及其变码率编码器 FPGA 实现[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2020，32(5)：752-758.
Wei Xia，Zhang Wenjun. Construction of QC-eIRA codes and the FPGA implementation of its multi-rate encoder[J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecomm. (Natural Science Edi.)，2020，32(5)：752-758.

[6] Zhang G H，Sun R，Wang X. Construction of girth-eight QC-LDPC codes from greatest common divisor [J]. IEEE Communications Lett.，2013，17(2)：369-372.

[7] Tasdighi A，Banihashemi A H，Sadeghi M R. Symmetrical constructions for regular girth-8 QC-LDPC codes[J]. IEEE Trans. on Communications，2017，65(1)：14-22.

[8] Karimi B，Banihashemi A H. Construction of irregular protograph-based QC-LDPC codes with low error floor[J]. IEEE Trans. on Communications，2021，69(1)：3-18.

[9] 袁建国，张希瑞，袁财政，等. 可见光通信中一种大围长可快速编码的 QC-LDPC 码构造方法[J]. 半导体光电，2020，41(3)：437-442，447.
Yuan Jianguo，Zhang Xirui，Yuan Caizheng，et al. A construction method of QC-LDPC code with girth-8 in visible light communication[J]. Semiconductor Optoelectronics，2020，41(3)：437-442，447.

作者简介：

袁建国(1968—)，男，重庆市人，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为通信系统中 LDPC 码与极化码的编译码技术以及 OFDM 技术。