MEMS 和 MOEMS 技术专题

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.2022112001

质量块-悬挂梁热弹性阻尼的 L-R 理论适用性

李 敏[1,2*]，刘骏康[1]，张加宏[1,2]，李慕白[3]

（南京信息工程大学 1. 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心；2. 电子与信息工程学院；3. 长望学院，南京 210044）

摘 要： 热弹性阻尼是谐振器中的一种基本能量耗散机制，决定了高 Q 谐振器的性能极限。检测质量块-悬挂支撑梁结构由于截面的变化，难以进行解析求解。已有研究表明，质量块刚性假设后，经典的 L-R 理论可以适用于该结构，然而该假设相对于实际器件所造成的计算误差却没有结论。针对这一问题，采用 L-R 理论计算与 ANSYS 有限元计算的对比分析方法，比较了在支撑梁和质量块尺度分别变化时的一阶固有频率和该频率下热弹性阻尼系数的计算误差，结果表明，L-R 理论的计算误差较大，并不适用于质量块-悬挂支撑梁结构热弹性阻尼系数的精确计算，但可有效估计尺度变化后热弹性阻尼的变化趋势。

关键词： 质量块-悬挂支撑梁结构；高 Q 谐振器；热弹性阻尼；L-R 理论

中图分类号： TN402；O414 **文章编号：** 1001－5868(2022)06－1062－06

Applicability of L-R Theory for Thermoelastic Damping of Mass Suspension Beam Structure

LI Min[1,2], LIU Junkang[1], ZHANG Jiahong[1,2], LI Mubai[3]

(1. Jiangsu Collaborative Innovation Center on Atmospheric Environment and Equipment Technology;
2. School of Electronics and Information Engineering;
3. Changwang School of Honors, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, CHN)

Abstract: Thermoelastic damping is a basic energy dissipation mechanism in the resonator, which determines the performance limit of high *Q* resonator. Testing the mass suspension support beam is difficult to solve analytically due to the variation of the cross section. Studies have shown that the classical L-R theory can be applied to the structure after the mass rigidity assumptions, yet the assumptions with respect to calculation error caused by the actual device is inconclusive. To solve this problem, a comparative analysis between the L-R calculation and ANSYS finite element analysis method was used to compare the first-order intrinsic frequency and the calculated error of thermoelastic damping coefficients at this frequency when the scales of the support beam and mass block were varied respectively. The results show that the calculation error of L-R theory is too large to calculate thermoelastic damping coefficient of mass suspension beam structure accurately, but it can estimate the change trend of thermoelastic damping effectively when the scale changes.

Key words: mass suspension support beam structure; high *Q* resonator; thermal elastic damping; L-R theory

0 引言

谐振梁是 MEMS 谐振器的核心部件，在一些需要高 *Q*（品质因数）谐振器的应用中，为了减小空气阻尼的影响常采用真空封装，此时，谐振梁的热弹性阻尼、基座损耗和表面损耗成为谐振器的主要能量耗散方式[1-4]，其中又以热弹性阻尼的影响最大[5]，决定了谐振器的性能极限。因此，在追求高品质因

收稿日期：2022－11－20.

* 通信作者：李 敏 E-mail：limin_nuist@nuist.edu.cn

数的谐振器设计中，对热弹性阻尼引起的能量耗散的预测能力是至关重要的[6]。

关于热弹性阻尼的研究最早可以追溯到 1937 年至 1938 年间 Zener 所做的关于固体内摩擦的研究[7]，建立了热弹性阻尼的一般理论。为了使得计算结果更接近于实际值，Lifshitz 对 Zener 的理论进行了修正[8]，提高了 Zener 模型的计算精度，该理论被简称为 L-R 理论。Zener 理论和 L-R 理论提出的解析公式可以对规则形状、符合欧拉-伯努利梁理论谐振梁的热弹性阻尼进行精确计算，然而在较复杂三维结构的处理能力上有所欠缺。近些年，MEMS 器件的加工、设计技术和复杂度不断提高，影响谐振器品质因数的多种能量损耗机制，在优秀的设计与加工技术下得到了有效抑制，而作为材料固有特性的热弹性阻尼却是无法消除的，其导致的能量耗散问题越发凸显为影响谐振器品质因数的主要因素，既然无法消除，那么对其进行精确的计算与评估就变得更为重要。

基于 Zener 理论和 L-R 理论的经典理论模型无法满足复杂三维结构的热弹性阻尼计算需求，于是，热弹性阻尼理论研究重新成为当前热点。在众多的研究议题中，不少研究者致力于复杂三维结构热弹性阻尼计算模型和计算方法的研究，例如美国丹佛大学的 Guo 等在文献[9]中讨论了有开孔结构谐振梁热弹性阻尼的有限元计算方法；欧道明大学的 Hao 等[10]则采用热能方法对复杂支撑结构微机械陀螺仪的热弹性阻尼计算问题进行了研究；我国东南大学的李普教授团队在经典理论基础上，对多种复杂结构的热弹性阻尼解析模型展开了系列研究，提出了菱形截面谐振梁[11]、多层结构谐振梁[12]、弯扭谐振梁[13]、非完全覆盖双层微梁[14]、一般三层欧拉-伯努利微梁[15]，以及含有检测质量块悬挂支撑梁[16]等诸多结构的热弹性阻尼解析计算模型，其中在文献[16]中论证了 L-R 理论公式对于含有检测质量块的悬挂支撑梁结构同样适用，论证过程中保留了 L-R 理论的基本假设，即热弹性阻尼不影响谐振频率；应变场对温度场只有单向影响；热传导只在梁厚度方向一维传导。此外，针对检测质量块部分作出新的假设，将检测质量块作为刚体进行处理，这样旋转对称的固支支撑梁，都可以作为固支-导向梁问题进行处理。刚体假设后，可以忽略检测质量块在结构振动过程中的局部应变，将含有检测质量块的悬挂支撑梁振动问题简化为弹簧-质量块系统的简谐振动问题，从而简化了热弹性阻尼的理论推导过程，证明了 L-R 理论公式仍然能很好地适用于质量块-悬挂梁结构的热弹性阻尼计算。然而质量块刚体假设可能引入的计算误差在文中并未作出讨论，本文则在非理想刚体条件下，以有限元数值计算结果作为参照，分析刚体假设在质量块-悬挂梁结构的热弹性阻尼计算中可能引入的误差大小，评估 L-R 理论对这类结构的适用性。

1　基本理论

1.1　热弹性阻尼

应力场变化引起应变场的变化，进一步引起温度场的变化，应力场与应变场之间没有相位差，而温度场的变化是滞后于应变场变化的，从而导致结构振动过程中的能量耗散，从晶格振动理论的角度可解释为声子的传播是需要时间的，这是热弹性阻尼现象的本质原因。各种阻尼机制独立存在时阻尼系数的倒数之和即为品质因数 Q，在其他阻尼机制可以忽略的前提下，结构的品质因数 Q 则取决于热弹性阻尼系数 Q_{TED}^{-1}，它由材料的固有特性所决定，无法完全消除，但可以在结构设计中进行优化。热弹性阻尼系数可以用两种方法进行定义：能量法和频率衰减法，能量法的定义式为[7,16]

$$Q^{-1}=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta W}{W_{\max}} \tag{1}$$

式中，ΔW 是由振动发热引起的能量损失，表示为

$$\Delta W=\iiint_V -\pi\sigma_{kk}\,\mathrm{Im}(\varepsilon_{\mathrm{thermal}})\,\mathrm{d}V \tag{2}$$

式中，σ_{kk} 表示轴向应力，$\varepsilon_{\mathrm{thermal}}$ 表示热应变。$W_{\max}$ 表示振动系统存储的最大弹性势能，计算式为[17]

$$W_{\max}=\iiint_V \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V \tag{3}$$

σ_{ij} 为应力张量，ε_{ij} 为应变张量。

频率衰减法的定义式为[8,16]

$$Q^{-1}=2\left|\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}\right| \tag{4}$$

式中，虚部 $\mathrm{Im}(\omega)$ 表示热弹性阻尼作用时的衰减频率，实部 $\mathrm{Re}(\omega)$ 表示谐振时的频率。

1.2　Zener 理论模型

Zener 理论是热弹性阻尼研究领域最早、最经典的理论，该理论针对符合欧拉-伯努利假设的细长弹性梁提出，从欧拉梁的纯弯曲振动方程和傅里叶一维热传导方程出发，推导出热弹梁的热传导方程，

并采用近似方法求解热传导方程，即只取温度场多阶热模态中的一阶主模态，得到热弹性阻尼 Q^{-1} 的解析公式为[7]

$$Q^{-1}=\frac{E\alpha T_0}{C_v}\cdot\frac{2\zeta^2/\pi^2}{1+(2\zeta^2/\pi^2)^2} \tag{5}$$

式中，参数 E 为等效杨氏模量，α 为热膨胀系数，C_v 为定容比热容，T_0 为参考温度，ζ 为无量纲参数，并由下式确定：

$$\zeta=b\sqrt{\frac{\omega_0}{2\chi}} \tag{6}$$

$$\chi=\frac{\kappa}{C_v} \tag{7}$$

式中，b 为梁的厚度，χ 为热扩散率，κ 为热传导率，ω_0 为梁在等温条件下的特征频率，受迫振动时可替换为 ω。

1.3 L-R 理论模型

由于 Zener 理论采用了一阶热模态近似，Lifshitz 和 Roukes(L-R)对 Zener 理论进行了改进，得到了热弹性阻尼更为精确的解，表达式为[8]

$$Q^{-1}=\frac{E\alpha^2 T_0}{C_v}\cdot\frac{6}{\zeta^2}-\frac{6}{\zeta^3}\cdot\frac{\sin(h\zeta)+\sin\zeta}{\cos(h\zeta)+\cos\zeta} \tag{8}$$

在中低频段，L-R 理论模型与 Zener 模型的计算结果近似，在高频段，两者之间的差异可达 20%。

2 质量块-悬挂梁热弹性阻尼解析模型

图 1 所示是由两根悬挂支撑梁和一个检测质量块构成的固支梁结构，质量块的长宽厚分别为 l_1，w_1 和 h_1，支撑梁的长宽厚分别为 l_2，w_2 和 h_2。两根支撑梁结构的尺寸相同，一端连接质量块，一端固定于锚区，在检测质量块视作刚体的假设下，两根悬挂支撑梁可简化为固支-导向梁，只考虑弯曲振动模态的情况下，质量块只有厚度方向的一维振动，如果满足 $l_1\gg w_1$ 且 $l_1\gg h_1$，则可以基于欧拉-伯努利梁理论和胡克定律，将系统进一步简化为弹簧-质量块结构，如图 2 所示，两根固支-导向梁简化为具有相同力常数 k 的并联弹簧，总的力常数 k_{eq} 为单根固支-导向梁力常数的两倍，则等效力常数 k_{eq} 和梁的固有频率 ω_n 可分别表示为[18]

$$k_{eq}=2k=2\left(\frac{Ew_1h_1^3}{l_1^3}\right) \tag{9}$$

$$\omega_n=k_{eq}/M \tag{10}$$

式中，M 为检测质量块的质量。

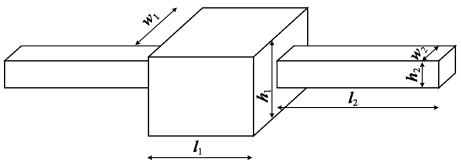


图 1 质量块-悬挂梁结构示意图

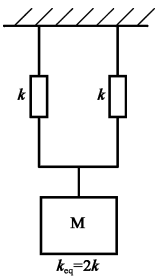


图 2 质量块-悬挂支撑梁结构简谐近似示意图

根据能量法定义，系统在固有频率点热弹性阻尼系数的大小为[16]

$$Q_{TED}^{-1}=\frac{2k}{M\omega_n^2}\frac{E\alpha^2T_0}{C_v}\frac{6}{\zeta_n^2}\cdot\left[1-\frac{1}{\zeta_n}\left(\frac{\sin(h\zeta_n)+\sin\zeta_n}{\cos(h\zeta_n)+\cos\zeta_n}\right)\right] \tag{11}$$

式中，

$$\zeta_n=h_1\sqrt{\omega_n/(2\chi)} \tag{12}$$

在刚性假设成立的条件下，可将式(10)代入式(11)得到

$$Q_{TED}^{-1}=\frac{E\alpha^2T_0}{C_v}\frac{6}{\zeta_n^2}\cdot\left[1-\frac{1}{\zeta_n}\left(\frac{\sin(h\zeta_n)+\sin\zeta_n}{\cos(h\zeta_n)+\cos\zeta_n}\right)\right] \tag{13}$$

上式即为固有频率点热弹性阻尼的解析模型，受迫振动时，可用受迫振动频率 ω 替换上式中的固有频率 ω_n，解析模型的表达式与 L-R 理论表达式完全相同，从而证明了 L-R 理论同样适用于含有质量块的悬挂支撑梁结构。

3 L-R 理论模型与有限元数值计算比较

L-R 理论模型同样适用于含有质量块的悬挂支撑梁结构，这一结论的前提是质量块作刚性假设，即认为质量块的杨氏模量为无穷大，作此假设后必然引起估算误差，梁和质量块连接部的局部应变与局部温度场、质量块的挠曲，包括固支-导向梁的弹簧近似，都会对热弹性阻尼和固有频率造成影响。这些影响的大小及其随结构尺寸变化的规律，都需要进一步的研究，对 L-R 理论的适用性进行论证。

本节采用 ANSYS 仿真软件进行有限元分析，采用 SOLID95 结构单元对含有质量块的悬挂支撑梁结构进行模态分析，提取一阶固有频率，采用 SOLID226 耦合单元进行热弹性阻尼分析，提取一阶固有频率下的热弹性阻尼系数，以 ANSYS 有限元计算结果作为参照，比较 L-R 理论的计算误差。ANSYS 热弹性阻尼系数的提取，通过对单元应变能虚部之和与应变能实部之和的比值求解得到，网格尺寸尽可能小，以满足计算结果的收敛准则，在本文所讨论的结构尺度下，采用的网格尺寸为 1 μm，结构分网模型如图 3 所示。

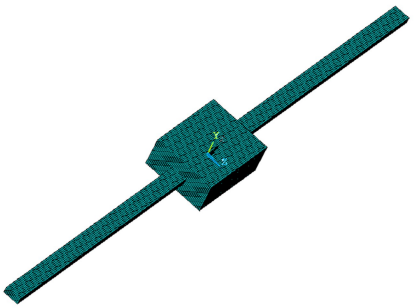


图 3　质量块-悬挂梁结构分网模型

考虑到谐振器通常工作于一阶固有频率下，在此频率下的热弹性阻尼系数在设计优化中才有实际意义，因此，本文对比的频率与热弹性阻尼系数关系，将只把固有频率点的情况纳入考虑。为了反映实际器件的非理想条件，在 ANSYS 计算中，质量块的材料特性与支撑梁相同，不作刚性假设，材料参数如表 1 所示。环境温度取 25 ℃，温度偏移量为 273 K。

表 1　质量块-悬挂梁结构材料参数表

杨氏模量 E/MPa	1.65×10^{5}
泊松比 ν	0.28
热传导率 κ/[pW/(μm·K)]	9.0×10^{7}
热容量 C_v/[pJ/(kg·K)]	6.99×10^{14}
热膨胀系数 α/(1/K)	7.8×10^{-6}
密度 ρ/(kg/μm^3)	2.33×10^{-15}

表 2 给出了 L-R 理论模型与 ANSYS 有限元模态分析一阶固有频率和一阶固有频率下热弹性阻尼系数计算结果的比较，根据 L-R 理论设计的谐振频率保持不变，支撑梁尺寸和质量块重量均保持不变，在质量块长度不变的条件下改变质量块宽度与厚度。支撑梁的长度、宽度和厚度依次为 200，5 和 2 μm，质量块的长度为 20 μm，理论设计的一阶固有频率为 59.896 2 KHz，热弹性阻尼系数为 $5.003\,6\times10^{-6}$，质量块的宽度和厚度变化及计算结果如表 2 所示。

表 2　质量块厚度与宽度变化时 L-R 理论与有限元计算的一阶固有频率和热弹性阻尼系数比较

质量块宽度 w_1/μm	质量块厚度 h_1/μm	有限元计算的固有频率 ω_0/kHz	固有频率计算相对误差/%	有限元计算的热弹性阻尼系数	热弹性阻尼系数计算相对误差/%
5	50	52.803 4	13.43	$3.039\,1\times10^{-6}$	64.64
10	25	52.850 7	13.33	$3.020\,1\times10^{-6}$	65.68
25	10	52.848 7	13.34	$3.087\,6\times10^{-6}$	62.05
50	5	52.793 4	13.45	$2.899\,4\times10^{-6}$	72.57
62.5	4	52.729 6	13.59	$2.873\,5\times10^{-6}$	74.13
100	2.5	52.243 5	14.65	$2.737\,1\times10^{-6}$	82.81
125	2	51.580 4	16.12	$2.620\,6\times10^{-6}$	90.93

表 3 给出了 L-R 理论模型与 ANSYS 有限元模态分析一阶固有频率和热弹性阻尼系数计算结果的比较，根据 L-R 理论设计的谐振频率保持不变，在质量块尺寸和支撑梁宽度均保持不变的条件下改变支撑梁长度与厚度。质量块的长度、宽度和厚度依次为 20，25 和 10 μm，支撑梁的宽度为 20 μm，理论设计的一阶固有频率为 59.896 2 kHz，支撑梁的长度和厚度变化及计算结果如表 3 所示。

表 3　支撑梁长度与厚度改变时 L-R 理论与有限元计算的一阶固有频率和热弹性阻尼系数比较

支撑梁长度 l_2/μm	支撑梁厚度 h_2/μm	有限元计算的固有频率 ω_0/kHz	固有频率计算相对误差/%	理论计算的热弹性阻尼系数	有限元计算的热弹性阻尼系数	热弹性阻尼系数计算相对误差/%
100	1	58.265 7	2.80	$1.250\,9\times10^{-6}$	$0.763\,1\times10^{-6}$	63.92
150	1.5	55.605 9	7.72	$2.814\,5\times10^{-6}$	$1.936\,5\times10^{-6}$	45.34
200	2	52.848 7	13.34	$5.003\,6\times10^{-6}$	$3.087\,6\times10^{-6}$	62.05
250	2.5	49.615 0	20.72	$7.818\,0\times10^{-6}$	$5.447\,6\times10^{-6}$	43.51
300	3	46.510 7	28.78	$11.257\,8\times10^{-6}$	$7.330\,8\times10^{-6}$	53.57

4　分析与结论

根据表 2，固有频率的理论计算误差会受到质量块尺寸的影响，只要质量块的厚度达到支撑梁厚度 2 倍以上，这一误差即可趋近于定值，即使质量块厚度与支撑梁厚度相仿时，相对误差的变化也较小。而高达 10%以上的相对误差则主要来源于质量块与支撑梁连接处的非理想连接，因为算例中的长厚比 l/h 已经高达 100，根据经典理论，在 $l/h\geqslant10$ 时，力常数的计算即可用公式(9)较好的近似。热弹性阻尼系数的计算则总体误差较大，并不符合文献中普遍认为的，梁的长厚比 $l/h\geqslant40$ 时，L-R 理论的计算误差可以控制在 10%以内这一结论，而误差随着梁厚度变小而变大，这是符合非理想质量块的实

际情况的，质量块厚度越小，非理想连接的影响越明显，原因有二：(1)较薄的质量块，在连接处的上下表面不能提供足够大的剪应力阻碍局部应变，导致热应变的产生，从而增加能量损耗；(2)质量块变薄后，质量块的挠曲也会变得严重，从而引起热应变和能量损耗。

根据表3，在支撑梁长厚比 l/h 不变的条件下，按照常识，固有频率的计算误差应不会发生较大变化，然而在含有质量块的悬挂支撑梁结构中，固有频率的计算误差会随着支撑梁厚度的变大而变大，产生这一现象的原因在于：支撑梁越厚，在支撑梁与质量块连接处造成的扭矩也会越大，在非理想质量块条件下，支撑梁会更加偏离固支-导向梁的边界条件，同时可能引起质量块的更大挠曲。热弹性阻尼系数的计算误差仍然较大，但是当支撑梁的长厚比 l/h 不变的条件下，热弹性阻尼系数的计算误差变化不大，原因在于尽管支撑梁厚度变大后，固支-导向梁的边界条件和理想刚度假设进一步受到破坏，造成更大的能量损耗，但同时随着支撑梁长度的变大，支撑梁上的能量损耗也在变大，系统储能也在变大，根据公式(1)对热弹性阻尼系数的定义，非理想条件受到破坏后造成的额外能量损耗，在总的系统损耗中所占比重有可能并未有大的变化，而热弹性阻尼计算误差较大的问题，正如上文所述，是由非理想连接和质量块的挠曲引起。

综上，L-R理论用于质量块－悬挂梁结构的热弹性阻尼计算，并不能如文献[16]所普遍认为的，在支撑梁长厚比足够大的情况下计算误差可以在10%以内，并能够用于一般的设计估算，造成误差较大的原因在于文献[16]的作者是在将质量块视作刚体的前提下得到L-R理论仍然适用于该结构的结论，这一理想条件并不适用于实际器件，大多情况下，MEMS器件并不能做到质量块材料的杨氏模量远远大于支撑梁材料，相反，多数情况下MEMS器件中质量块的材料往往和支撑梁选用的是同一种材料。同时，在理解结构尺寸变化对理想条件的影响后，L-R理论用于趋势预测仍然不失为一种较为准确的模型。

参考文献：

[1] Roszhart T V. The effect of thermoelastic internal friction on the Q of micromachined silicon resonators[C]// IEEE 4th Technical Digest on Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head, SC, USA, 1990: 13-16.

[2] Sorenson L, Shao P, Ayazi F. Bulk and surface thermoelastic dissipation in micro hemispherical shell resonators[J]. J. of Microelectromechanical Systems, 2015, 24(2): 486-502.

[3] Yasumura K Y, Stowe T D, Chow E M, et al. Quality factor in micron and submicron thick cantilevers[J]. J. of Microelectromechanical Systems, 2000, 9(1): 117-125.

[4] Sharma N G, Sundararajan T, Gautam S S. Effect of geometric imperfections on anchor loss and characterization of a gyroscope resonator with high quality factor[J]. Gyroscopy and Navigation, 2020, 11(3): 206-213.

[5] Nguyen C C, Howe R T. Quality factor control for micromechanical resonators[C]// Tech. Dig. IEEE Int. Electron Devices Meeting, 1992: 505-508.

[6] Joshi S, Hung S, Vengallatore S. Design strategies for controlling damping in micromechanical and nanomechanical resonators[J]. EPJ Techniques and Instrumentation, 2014, 5(1): 1-14.

[7] Zener C. Internal friction in solids. Ⅰ. Theory of internal friction in reeds[J]. Phys. Rev., 1937, 52: 230-235.

[8] Lifshitz R, Roukes M L. Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems[J]. The American Physical Society, 2000, 61(8): 5601-5609.

[9] Guo X, Yi Y B, Pourkamali S. A finite element analysis of thermoelastic damping in vented MEMS beam resonators[J]. Inter. J. of Mechanical Sciences, 2013, 74: 73-82.

[10] Hao Z, Xu Y, Shiva K D. A thermal-energy method for calculating thermoelastic damping in micromechanical resonators[J]. J. of Sound and Vibration, 2009, 322: 870-882.

[11] 陆苏杰. 具有菱形截面的微梁谐振器件的热弹性阻尼机理与模型[D]. 南京：东南大学，2016.
Lu Sujie. Mechanism and model of thermoelastic damping in microbeam resonators with rhombic cross-section[D]. Nanjing: Southeast University, 2016.

[12] Zuo W, Li P, Zhang J R, et al. Analytical modeling of thermoelastic damping in bilayered microplate resonators[J]. Inter. J. of Mechanical Sciences, 2016, 106: 128-137.

[13] 台永鹏，李 普，左万里. 弯扭耦合影响的MEMS扭转谐振器件中的热弹性阻尼[J]. 振动与冲击，2014，33(13)：35-39，105.
Tai Yongpeng, Li Pu, Zuo Wanli. Thermoelastic damping in MEMS torsion resonators with coupling effect between torsion and bending[J]. J. of Vibration and Shock, 2014, 33(13): 35-39, 105.

[14] 杨龙飞，李 普，叶一舟. 非完全覆盖双层微梁谐振器热弹性阻尼建模[J/OL]. 振动工程学报：1-10[2022-11-20]. http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1349.TB.20211229.1337.002.html.
Yang Longfei, Li Pu, Ye Yizhou. Thermoelastic damping in microbeam resonators partially covered by coatings[J/OL]. J. of Vibration Engineering: 1-10[2022-11-20]. http://kns.cnki.

net/kcms/detail/32.1349.TB.20211229.1337.002.html.

[15] 左万里. 多层结构微梁微板谐振器的热弹性阻尼机理与模型[D]. 南京：东南大学，2016.
Zuo Wanli. Thermoelastic damping mechanism and model of micro beam and micro plate resonator with multilayer structure [D]. Nanjing: Southeast University, 2016.

[16] Li P, Hu R F. Thermoelastic damping in micromechanical resonators with a proof mass and a network of suspension beams[J]. Jap. J. of Appl. Phys., 2011, 50(7): 77202.1-77202.10.

[17] Timoshenko S. Theory of Plates and Shells[M]. McGraw-Hill Book Company, 1940.

[18] Liu C. Foundations of MEMS[M]. Prentice Hall, 2011.

作者简介：

李　敏(1979—)，男，江苏省如皋市人，工学博士，讲师，主要研究方向为微纳电子机械系统、传感器技术；

张加宏(1979—)，男，江苏省东台市人，工学博士，副教授，主要研究方向为微纳电子机械系统、传感器技术。