光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.2023091203

基于分布式奇偶校验码的低复杂度极化码SCLF译码算法

袁建国*，贺京杰，张丰果，翟少秋
（重庆邮电大学 通信与信息工程学院，重庆 400065）

摘　要： 针对极化码串行抵消列表比特翻转(Successive Cancellation List Bit-Flip，SCLF)译码算法复杂度较高的问题，提出一种基于分布式奇偶校验码的低复杂度极化码SCLF译码(SCLF Decoding Algorithm for Low-Complexity Polar Codes Based on Distributed Parity Check Codes，DPC-SCLF)算法。与仅采用循环冗余校验(Cyclic Redundancy Check，CRC)码校验的SCLF译码算法不同，该算法首先利用极化信道偏序关系构造关键集，然后采用分布式奇偶校验(Parity Check，PC)码与CRC码结合的方式对错误比特进行检验、识别和翻转，提高了翻转精度，减少了重译码次数。此外，在译码时利用路径剪枝操作，提高了正确路径的竞争力，改善了误码性能，且利用提前终止译码进程操作，减少了译码比特数。仿真结果表明，与D-Post-SCLF译码算法和RCS-SCLF译码算法相比，所提出算法具有更低的译码复杂度且在中高信噪比下具有更好的误码性能。

关键词： 极化码；分布式奇偶校验码；SCLF译码算法；低复杂度
中图分类号： TN919　**文章编号：** 1001－5868(2023)06－0931－07

SCLF Decoding Algorithm for Low-Complexity Polar Codes Based on Distributed Parity Check Codes

YUAN Jianguo，HE Jingjie，ZHANG Fengguo，ZHAI Shaoqiu
（School of Comm. and Information Engin.，Chongqing University of Posts and Telecommunications，Chongqing 400065，CHN）

Abstract： Aiming at the problem of high complexity of successive cancellation list bit-flip (SCLF) decoding algorithm，a SCLF decoding algorithm for low-complexity polar codes based on distributed parity check codes (DPC-SCLF algorithm) is proposed. Different from the SCLF decoding algorithm which only used CRC codes verification，the proposed algorithm first constructed the critical set by using the polar channel partial order relationship，and then used the combination of distributed parity check codes and CRC codes to check，identify and flip the error bits，so the flipping accuracy was improved and the number of the redecoding was reduced. In addition，the path pruning operation during decoding was used to improve the competitiveness of the correct path and the performance of the bit error ratio (BER)，and the number of decoding bits was reduced by using the early termination decoding process operations. The simulation results show that compared with the D-Post-SCLF decoding algorithm and RCS-SCLF decoding algorithm，the proposed algorithm has the lower decoding complexity and the better performance of the BER under the medium and high signal-to-noise ratio.

Key words： polar codes；distributed parity check codes；SCLF decoding algorithm；low complexity

收稿日期：2023－09－12.
基金项目：国家自然科学基金项目(U21A20447，61971079).
* **通信作者：**袁建国　**E-mail：** yyyyjg@126.com

0 引言

极化码因其良好的优越性已被作为5G增强型移动宽带场景下控制信道的编码标准[1]。极化码的串行抵消(Successive Cancellation,SC)译码算法在码长无限长时可以达到信道容量,但对于中短码长下的SC译码算法,译码过程中会出现较严重的错误传播,导致误码性能较差。

为了提高SC译码算法的误码性能,文献[2]提出了串行抵消列表(Successive Cancellation List,SCL)译码算法,通过在列表中保留多个候选路径来提高误码性能。为了获得比SCL译码算法更好的误码性能,文献[3]提出了循环冗余校验辅助SCL(Cyclic Redundancy Check Aided SCL,CA-SCL)译码算法,该算法在极化码末尾级联循环冗余校验(Cyclic Redundancy Check,CRC)码,通过CRC码对多条候选路径进行校验,有效提高了SCL译码算法的性能。为了提高CA-SCL译码算法的误码性能,文献[4]提出了串行抵消列表比特翻转(Successive Cancellation List Bit-Flip,SCLF)译码算法,该算法将CA-SCL译码算法和串行抵消比特翻转(Successive Cancellation Bit-Flip,SCF)译码算法[5]很好地融合在一起,误码性能也在CA-SCL和SCF之上获得了很好的提升,SCLF译码通过在重译码过程中改变翻转比特的路径竞争决策结果来实现翻转。为了提高初始SCLF译码算法的性能,文献[7-8]提出了先进的决策后处理(Decision Post-Processing,D-Post)翻转准则,且文献[8]基于该准则提出了多比特翻转的高阶SCLF译码算法。文献[9]通过计算每个比特的归一化置信度来构造特定集,通过翻转特定集中的比特来改善性能。但是,目前SCLF译码算法还存在着复杂度较高的问题,针对此问题,本文提出了一种能缩小错误比特搜索范围、减少重译码次数和译码比特数的基于分布式奇偶校验码的低复杂度极化码SCLF(SCLF Decoding Algorithm for Low-Complexity Polar Codes Based on Distributed Parity Check Codes,DPC-SCLF)译码算法,降低了SCLF译码的复杂度,且在一定范围内提高了误码性能。

1 极化码译码

考虑一个二进制(N,K)极化码,A和A^C分别表示信息位与冻结位的索引集。u_1^N表示输入至极化码编码器的信源序列,x_1^N为码字序列,$x_1^N=u_1^N\boldsymbol{G}_N$,其中$\boldsymbol{G}_N$表示极化码的生成矩阵。假设码字在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise,AWGN)信道上基于二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying,BPSK)调制,令y_1^N表示x_1^N所对应的接收向量,$\hat{u}_1^i$表示译码树中长度为i的路径,其中$\hat{u}_j(1\leqslant j\leqslant i)$为$u_j$估计值。

1.1 极化码CA-SCL译码

对于SC译码,如果$i\in A^C$,判决$\hat{u}_i$为0;如果$i\in A$,定义比特u_i的对数似然比(Logarithm Likelihood Ratio, LLR)为$L_N^{(i)}=\ln\left(\frac{w_N^{(i)}(y_1^N,\hat{u}_1^{(i-1)}\mid u_i=0)}{w_N^{(i)}(y_1^N,\hat{u}_1^{(i-1)}\mid u_i=1)}\right)$,当$L_N^{(i)}\geqslant 0$,判决$\hat{u}_i$为0,否则判决$\hat{u}_i$为1。

与SC译码仅有一条译码路径不同,SCL译码在译码过程中保留了多条路径,增加了获取正确译码路径的概率。对于列表大小为L的SCL译码,令$\hat{u}_{1,l}^i=(\hat{u}_{1,l},\hat{u}_{2,l},\cdots,\hat{u}_{i,l})$($\forall 1\leqslant l\leqslant L$)表示在使用路径度量(Path Metric,PM)$PM_l^{(i)}$且初始化$PM_l^{(0)}$为0的情况下,译码u_1^i列表中的第l条路径。对于$\forall i,l,L_{N,l}^{(i)}=\ln\left(\frac{w_N^{(i)}(y_1^N,\hat{u}_{1,l}^{i-1}\mid u_i=0)}{w_N^{(i)}(y_1^N,\hat{u}_{i,l}^{(i-1)}\mid u_i=1)}\right)$。对于任意一条译码路径,给定$\hat{u}_{1,l}^{i-1}$和$PM_l^{(i-1)}$,$PM_l^{(i)}$更新如下:

$$PM_l^{(i)}=\begin{cases}PM_l^{(i-1)}, & \hat{u}_{i,l}=\frac{1}{2}[1-\mathrm{sign}(L_{N,l}^{(i)})]\\ PM_l^{(i-1)}+|L_{N,l}^{(i)}|, & \text{其他}\end{cases}\tag{1}$$

由公式(1)可知,路径度量值越小对应的路径可靠度越高。对于$i\in A$,$\hat{u}_{1,l}^{i-1}$将被扩展为$\hat{u}_i=0$和$\hat{u}_i=1$这两条路径。如果扩展路径的数量大于L,则仅保留L条路径度量值最小的路径,最终SCL译码获得L条候选路径,选择路径度量值最小的路径最为译码输出。CA-SCL译码利用CRC码对最终的L条译码路径进行校验,输出通过CRC校验且路径度量值最小的路径作为译码输出。

1.2 SCLF译码算法

SCLF译码通过在重译码过程中改变路径竞争决策结果来实现比特翻转。文献[6]基于路径度量矩阵[10]提出了三种译码路径状态:

(1)克隆状态:如果路径度量矩阵排序后保留$\hat{u}_i=0$和$\hat{u}_i=1$两种译码子路径,则该路径为克隆状态;

(2)SC 状态：如果路径度量矩阵排序后仅保留 $\hat{u}_i=0$ 或 $\hat{u}_i=1$ 一种译码子路径，则该路径为 SC 状态；

(3)删除状态：如果路径度量矩阵排序后删除了 $\hat{u}_i=0$ 和 $\hat{u}_i=1$ 两种译码子路径，则该路径为删除状态。

基于这三种路径状态，将 SCLF 译码算法的翻转方案分为两种，如图 1 所示。假设列表大小 $L=4$，u_1，u_2，u_3 和 u_5 为信息比特，u_4 为冻结比特，且 u_5 为翻转比特，黑色节点表示保留路径，白色节点表示删除路径。图 1(a)为 CA-SCL 译码过程，由图 1(a)可以看出，节点 A 为删除状态，节点 B 为克隆状态，节点 C 和 D 为 SC 状态。文献[8]选用了图 1(b)所示的翻转方案，所有节点的路径竞争决策结果均与 CA-SCL 译码相反，这种翻转方案可以有效避免获得与 CA-SCL 译码相同的译码结果。文献[6]根据 SC 译码构造了翻转关键集，所以选用了图 1(c)所示的翻转方案，仅对 SC 状态节点的路径竞争决策结果进行改变，其余节点与 CA-SCL 译码保持一致。本文构造的关键集与 SC 译码有关，故选用图 1(c)所示的翻转方案。

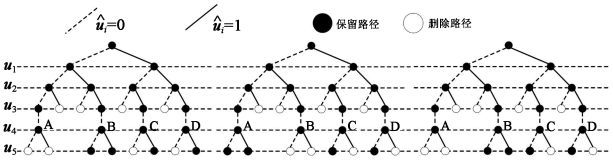


图 1　CA-SCL 和 SCLF 译码树

1.3　高斯近似

考虑码长为 N 的极化码在噪声方差为 σ^2 的 AWGN 信道中传输，假设输入为全 0 码字，则根据文献[11]，$L_N^{(i)}\sim N(E[L_N^{(i)}],2E[L_N^{(i)}])$。根据高斯近似原理，文献[12]给出了在信道 $W_N^{(i)}$ 的 LLR 均值为 $E[L_N^{(i)}]$ 的情况下，求取 $E[L_{2N}^{(2i-1)}]$，$E[L_{2N}^{(2i)}]$以及信道错误概率的公式，如公式(2)～(5)所示：

$$E[L_{2N}^{(2i-1)}]=\phi^{-1}(1-(1-\phi(E[L_N^{(i)}]))^2) \tag{2}$$

$$E[L_{2N}^{(2i)}]=2E[L_N^{(i)}] \tag{3}$$

$$\phi(x)=1-\frac{1}{\sqrt{4\pi x}}\int_R\tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times e^{-\frac{(a-x)^2}{4x}}\,d\alpha \tag{4}$$

$$P_e(W_N^{(i)})=Q(\sqrt{E[L_N^{(i)}]/2})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{E[L_N^{(i)}]/2}}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \tag{5}$$

通过不断地使用公式(2)和公式(3)，可以计算出每一个极化子信道 $W_N^{(i)}$ 的 LLR 期望，LLR 期望值越大所对应的极化子信道的可靠度越高。

2　分布式奇偶校验结构

在 SCLF 译码中有两种情况会导致译码性能不佳，一种是码字通过 CRC 码时，未能及时校验出错误；一种是在重译码次数达到最大值时错误比特仍未得到修正。本文所提出的分布式奇偶校验结构将码字细分为多个分段，在 CRC 校验之前增加分布式 PC 校验，一方面分布式 PC 码可以均匀地校验关键集中的比特，增强校验强度，缓解错误比特未被检测出而导致的性能不佳的问题，另一方面可以利用首位校验出错误的 PC 码来缩小关键集，减少错误比特的搜索次数。同时所提出的分布式 PC 结构在译码过程中可以加入路径剪枝以及提前终止译码操作，以此来降低译码复杂度。

2.1　构造关键集

SCLF 译码算法中的关键集应当包含大多数由信道噪声引起的译码错误比特。根据文献[12]中所给出的定理可得，对于码长 $N\geqslant4$ 的极化码，有以下关系成立：

$$W_N^{(0)}\prec W_N^{(1)}\prec W_N^{(2)}，且\ W_N^{(j)}\prec W_N^{(i)}，\quad \forall j\in\{0,1,2\},\forall i\geqslant3 \tag{6}$$

$$W_N^{(N-3)}\prec W_N^{(N-2)}\prec W_N^{(N-1)}，且\ W_N^{(j)}\prec W_N^{(i)}，\quad \forall j\in\{N-1,N-2,N-3\},\forall j\leqslant N-4 \tag{7}$$

其中，“$\prec$”表示统计退化，例如 $W\prec Q$，称为信道 W 是信道 Q 的统计退化，且 $P_e(W)\geqslant P_e(Q)$[12]。公式(6)和公式(7)说明码长为 N 的极化码，其前三个极化子信道 $W_N^{(0)}$，$W_N^{(1)}$，$W_N^{(2)}$ 最不可靠，后三个极化子信道 $W_N^{(N-3)}$，$W_N^{(N-2)}$，$W_N^{(N-1)}$ 最可靠。对于极化码，码率为 1 的子极化码包含了所有的信息比特，且码率为 1 的子极化码码长相对较小，因此本文将极化码所有码率为 1 的子极化码中前三个比特构成关键集，记为 S。图 2 为(16,8)极化码的二叉树示意图，叶节点表示信息序列 u_1^{16}，其中黑色节点为信息比特，白色节点为冻结比特，灰色节点表示其叶节点既有信息比特又有冻结比特。A，B，C，D 这四个子节点的叶节点组成了码率为 1 的四个极化码子块，因此对于图 2 所示的极化码，关键集 $S=\{u_8,u_{10},u_{11},u_{12},u_{13},u_{14},u_{15}\}$。

为了降低译码复杂度，本文基于信道错误概率

提出缩小关键集策略，根据 $P_e(W_N^{(i)})$ 删除掉关键集中信道错误概率较低的子信道对应的比特。假设错误概率相对较低的比特在关键集中的占比为 β，β 值确定后，会有相对应的错误概率值 P_{e_β}，当 $P_e(W_N^{(i)}) \geqslant P_{e_\beta}$ 时，说明该信道错误概率相对较高。因此，在关键集中仅保留 $P_e(W_N^{(i)}) \geqslant P_{e_\beta}$ 的比特，其余比特删除，得到缩减关键集 RS，$|RS| = (1-\beta)|S|$，用公式(8)表示。由于关键集中需要尽可能地包含由信道噪声引起的译码错误比特，而缩减程度过大会导致一些译码错误比特被删除，影响所提算法的误码性能，因此本文将 β 的阈值定为 0.5，即 $0 < \beta \leqslant 0.5$。

$$RS = \{u_i \mid P_e(W_N^{(i)}) \geqslant P_{e_\beta}, u_i \in S\} \quad (8)$$

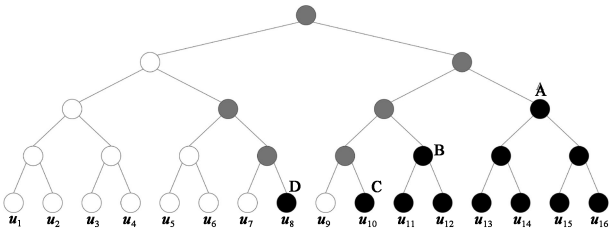


图 2 (16,8)极化码的二叉树示意图

2.2 分布式奇偶校验结构的具体实现

在本文所提出的算法中，分布式 PC 码和 CRC 码也被认定为是信息比特。用 n_{CRC}，n_{PC} 和 n_{RS} 分别表示 CRC 码、PC 码和关键集中信息比特的数量。令 $a = \left\lceil \frac{n_{RS}}{n_{PC}} \right\rceil$，$b = \left\lfloor \frac{n_{RS}}{n_{PC}} \right\rfloor$，“⌈⌉”和“⌊⌋”分别表示向上取整和向下取整。基于 a 和 b 的值将关键集分为 n_{PC} 段，每位 PC 码校验一个分段，这样可以保障 PC 码均匀分布在关键集内。对于 PC 码来说，将其放置在可靠度较高的信道能够减少由 PC 码译码错误造成的额外的性能损失，因此，本文将每个分段的 PC 码放置在该段中最可靠的子信道，也就是 $E[L_N^{(i)}]$ 最大值对应的子信道。针对关键集的分段分为两种情况讨论：

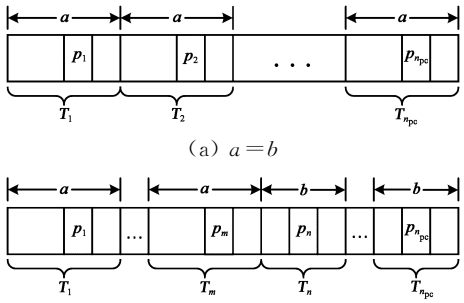
(1) $a = b$：关键集平均分为 n_{PC} 段，每位 PC 码均校验 a 位信息比特；

(2) $a = b+1$：关键集分为 n_{PC} 段，部分 PC 码需要比其他 PC 码多校验一位信息比特。因此，让前面的每位 PC 码校验 a 位信息比特，其余 PC 码校验 b 位信息比特。如果所有 PC 码均校验 b 位信息比特，那么就会剩余 $n_{RS} - n_{PC} \times b$ 位信息比特无法被校验，因此，让前 $n_{RS} - n_{PC} \times b$ 位 PC 码校验 a 位信息比特，剩余的 PC 码校验 b 位信息比特。

完成关键集分段后，将 PC 码放置在每一分段中最可靠的子信道上。以 $p = \{p_1, p_2, \cdots, p_{n_{PC}}\}$ 来表示 PC 码的索引值，$T = \{T_1, T_2, \cdots, T_{n_{PC}}\}$ 表示分段集合，$T_j = \{t_{1,j}, t_{2,j}, \cdots, t_{m_j,j}\}$，$j = 1, 2, \cdots, n_{PC}$ 表示第 j 个分段，其中 m_j 表示第 j 个分段的长度，$t_{i,j}$ 表示第 j 个分段中第 i 个信息比特的索引值，则第 j 个 PC 码的值由校验方程式(9)来计算。

$$u_{p_j} = \bigoplus_{k \in T_j \& k \neq p_j} u_k \quad (9)$$

其中，“⊕”表示模二加。PC 码的放置情况以及关键集的分段情况如图 3 所示，空白部分为关键集中的信息比特，阴影部分为 PC 码。



注：$m = n_S - n_{PC} \times b$　　$n = n_S - n_{PC} \times b + 1$

图 3 PC 码的放置情况以及关键集的分段情况示意图

以图 2 所示的关键集 $S = \{u_8, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15}\}$ 为例，对关键集的分段进行说明。为了简单起见，我们将 S 分为两段 $\{u_8, u_{10}, u_{11}, u_{12}\}$ 和 $\{u_{13}, u_{14}, u_{15}\}$，假设两个分段 $E[L_N^{(i)}]$ 中最大值分别对应的比特为 u_{11} 和 u_{14}，即 u_{11} 和 u_{14} 为校验每段的 PC 码。在译码过程中所有候选路径 PC 码的值均不满足公式(9)时，称此 PC 码为错误 PC 码。当检测到首个错误 PC 码时，可以将首个译码错误比特锁定在该 PC 码所在分段及之前的分段中，这些分段中的比特构成新的关键集 S_1，S_1 中的比特相对 RS 较少，可以减少错误比特搜索次数，进而减少译码复杂度。如果整个译码过程中都没有检测出错误 PC 码，则 S_1 与 RS 相等。由于在缩减关键集中使用到的 $P_e(W_N^{(i)})$ 是在 SC 译码器下通过高斯近似得出的，所以需要在 S_1 中去除掉不包含 SC 状态路径的比特，得到最终关键集 S_{final}，S_{final} 用公式(10)来表示。

$$S_{final} = S_1 \backslash \kappa \quad (10)$$

其中，κ 表示不包含 SC 状态路径的比特集合，S_{final} 中的比特按照 $E[L_N^{(i)}]$ 进行升序排序。

3　一种新颖的 DPC-SCLF 译码算法

3.1　编码过程

考虑极化码码长为 N，传输的信息比特序列为 u_1^m，添加 PC 码的数量为 n_{PC}，添加 CRC 码的数量为 n_{CRC}，在编码时根据 3.1 和 3.2 所述内容构造缩减关键集以及选取 PC 位，且根据公式(9)对每个 PC 位的值进行计算，完成 PC 码编码。PC 编码之后的序列为 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}}$，将 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}}$ 进行 CRC 编码得到 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}+n_{\mathrm{CRC}}}$，最后将 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}+n_{\mathrm{CRC}}}$ 作为极化码中的信息比特集合进行极化码编码得到码字 x_1^N。

表 1　编码过程

编码过程
输入：码长 N，信息比特序列 u_1^m，PC 码数目 n_{PC}，CRC 码数目 n_{CRC}，A^{C}，A
输出：极化码码字 x_1^N
1：根据 A^{C} 和 A 构造关键集 S
2：根据信道错误概率得到缩减关键集 RS
3：对 RS 分段，选取每个分段中 $E[L_N^{(i)}]$最大值对应的比特为 PC 码
4：对序列 u_1^m 进行 PC 编码得到序列 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}}$
5：对序列 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}}$ 进行 CRC 编码，得到序列 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}+n_{\mathrm{CRC}}}$
6：将序列 $u_1^{m+n_{\mathrm{PC}}+n_{\mathrm{CRC}}}$ 作为计划码的非冻结比特集合进行极化码编码，得到极化码码字 x_1^N

3.2　译码过程

DPC-SCLF 译码算法与普通 SCLF 译码算法相比，融入了奇偶校验、路径剪枝以及提前终止译码进程操作。由于分布式奇偶校验码将关键集分为了 n_{PC} 个分段，因此 CA-SCL 译码过程将被分为 $n_{\mathrm{PC}}+1$ 段进行。

以上述 3.2 章节中对图 2 所示关键集的分段为例，$\{u_8,u_{10},u_{11},u_{12}\}$和$\{u_{13},u_{14},u_{15}\}$两个分段将译码过程分为三个顺序段，第一段包括$\{u_1,u_2,\cdots,u_{12}\}$，第二段包括$\{u_{13},u_{14},u_{15}\}$，第三段包括$\{u_{16}\}$，前两个分段在译码时被 PC 码校验，所有分段均被 CRC 码校验，顺序对这三个分段进行 CA-SCL 译码。具体编译码过程如图 4 所示，其中 i 表示第 i 段译码序列。

DPC-SCLF 译码算法具体译码过程如表 2 所示。该算法顺序对每个分段进行 CA-SCL 译码，对于 PC 码所在的分段，在该分段译码结束后进行 PC 校验，如果存在通过 PC 校验的译码序列，则对未通过 PC 校验的路径进行剪枝并继续下一分段译码；如果所有序列均未通过 PC 校验，或 CRC 校验，则提前终止译码进程，随后构造关键集 S_{final}，进行重译码，顺序翻转关键集中的比特。如果重译码过程成功通过了 PC 校验和 CRC 校验，则输出正确译码路径，否则执行下一次重译码，当达到最大翻转次数还未得到正确译码序列时，译码失败。

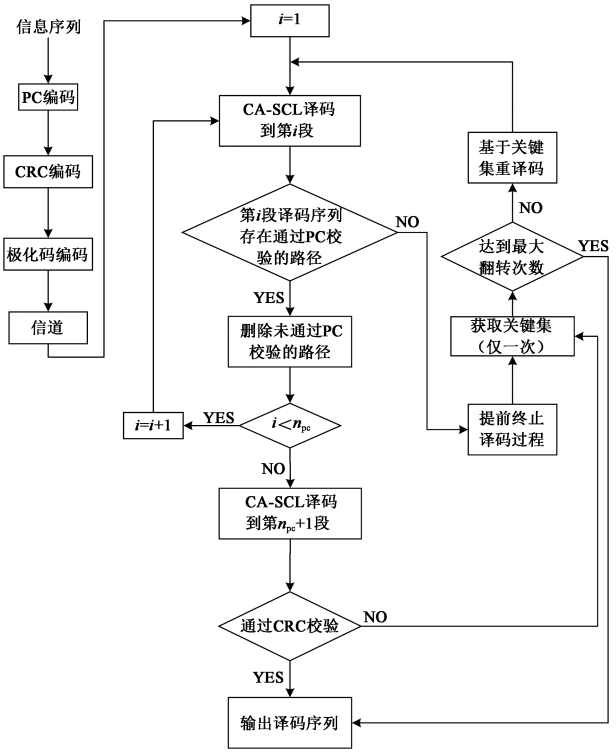


图 4　DPC-SCLF 编译码流程图

表 2　译码过程

译码过程
输入：码长 N，接收序列 y_1^N，RS，A^{C}，A
输出：信息序列估计 $\hat{u}_1^N$
1：for ($i=1$;$i\leqslant n_{\mathrm{PC}}$;$i++$)
2：CA-SCL 译码到第 i 段
3：PC 码校验第 i 段译码序列
4：if 存在通过 PC 校验的路径
5：剪枝未通过校验的路径
6：else
7：执行第 16 行
8：end if
9：end for
10：CA-SCL 译码到 $n_{\mathrm{PC}}+1$ 段
11：CRC 校验全部译码序列
12：if 存在通过 CRC 校验的路径
13：return $\hat{u}_1^N$(译码成功)
14：else
15：执行第 16 行
16：end if
17：获取关键集 S_{final}
18：$t=1$
19：while $t\leqslant T$($T=\min(T_{\max},\lvert S_{\mathrm{final}}\rvert)$)
20：执行第 1 行，并翻转比特 $S_{\mathrm{final}}(t)$
21：end while
22：if $t=T+1$
23：return $\hat{u}_1^N$(译码失败)
24：end if

4　仿真分析

为了验证本文所提算法的优越性，本节仿真分析了在 AWGN 信道下不同算法的误块率以及译码复杂度。所有译码算法均采用码长 $N=1\,024$，码率

$R=0.5$ 的极化码，列表大小设置为 $L=8$。CA-SCL 译码算法、文献[6]中 RCS-SCLF 译码算法、文献[7]中先进的 D-Post-SCLF 译码算法均采用 16 位 CRC 校验码，对应的生成多项式为 $g_{16}(x)=x^{16}+x^{15}+x^2+1$。为了体现本文所提出的分布式奇偶校验结构的有效性，还将其与文献[4]中所提出的校验方法进行了对比，即文献[4]提出的校验方式与 SCLF 译码结合形成的 PC-SCLF 译码算法。为了保障所有译码算法的校验码长度相同，PC-SCLF 译码算法和本文所提出的 DPC-SCLF 译码算法均采用 8 位 PC 码和 8 位 CRC 码，CRC 码的生成多项式为 $g_8(x)=x^8+x^6+x^3+x^2+1$。所有译码算法最大翻转次数设置为 $T_{\max}=50$。

4.1 最佳 β 值分析

β 值影响着关键集的缩减比例，本节通过仿真获取 β 的最佳值，保障在实现缩小搜索范围的同时达到误码性能最佳。图 5 为 $SNR=3$ dB 时，不同 β 取值下 DPC-SCLF 译码算法的误块率仿真图，由图 5 可得，β 取值为 0.1 时，译码器的误码性能最佳。

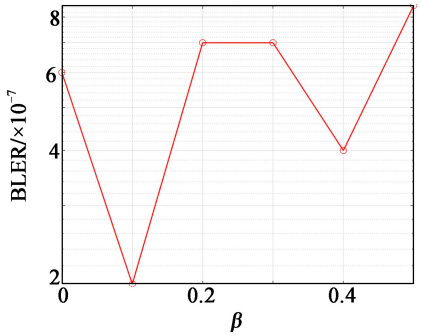


图 5 $SNR=3$ dB 时不同 β 值的 BLRE 性能

为了进一步验证 β 的最佳取值为 0.1，图 6 仿真了不同信噪比下 β 取值为 0(关键集不缩减的情况)、0.1 和 0.4 译码器的误码性能，由图 6 可得，β 取值为 0.1 时译码器的误码性能依旧最佳，因此 β 的最佳取值为 0.1。

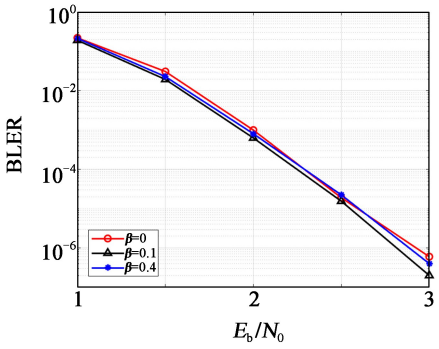


图 6 $\beta=0,0.1,0.4$ 在不同 SNR 下的 BLER 性能

4.2 误码性能分析

图 7 为不同译码算法的误块率仿真图，由图 7 可得，在低信噪比区域，本文所提的 DPC-SCLF 译码算法与 D-Post-SCLF 译码算法拥有几乎相同的误码性能，且比 RCS-SCLF 译码算法和 CA-SCL 译码算法的误码性能优异。在中高信噪比区域，DPC-SCLF 译码算法误码性能最优，在误块率为 2×10^{-6} 时，DPC-SCLF 译码算法相较 CA-SCL 译码算法、RCS-SCLF 译码算法、D-Post-SCLF 译码算法和 PC-SCLF 译码算法分别约有 0.22，0.07，0.09 和 0.12 dB 的增益。

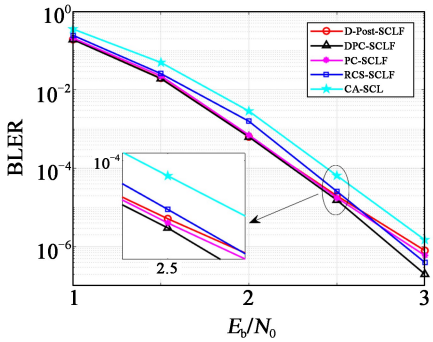


图 7 不同译码算法的 BLER 性能

4.3 复杂度分析

本文以平均译码次数作为复杂度度量，由于 DPC-SCLF 译码算法在检测到错误 PC 码时会提前终止译码进程，只有错误 PC 码所在分段及之前分段的比特会被译码，其余比特将不再被译码，因此一轮被提前终止的译码过程仅由被译码比特的计算复杂度组成。假设一次译码过程在 $T(0\leqslant T\leqslant T_{\max})$ 次翻转结束，则 DPC-SCLF 译码算法复杂度的计算如公式(11)所示，N_{Flip} 本质上就是 DPC-SCLF 译码算法需要多少次完整的 CA-SCL 译码。Loc(Last(0))为首次译码中首个错误 PC 码所在分段的最后一个比特的位置，当译码序列通过所有 PC 校验时，Loc(Last(0))的值为 N，Loc(Last(k))为第 k 次重译码时的首个错误 PC 码所在分段的最后一个比特位置，当第 k 次重译码通过所有 PC 码校验时，Loc(Last(k))的值为 N。

$$N_{\text{Flip}}=\frac{Loc(Last(0))}{N}+\sum_{K=1}^{T}\frac{Loc(Last(k))}{N} \tag{11}$$

图 8 为不同译码算法的复杂度，由图 8 可以看出，在高信噪比区域所有译码算法的复杂度几乎与 CA-SCL 译码算法相同。在低信噪比区域，即信道

条件较差的情况下，本文提出的 DPC-SCLF 译码算法复杂度最低。在信噪比为 1 dB 的情况下，DPC-SCLF 译码算法相较 RCS-SCLF 译码算法、D-Post-SCLF 译码算法和 PC-SCLF 译码算法的译码复杂度分别降低了大约 46%，36%和 10%。

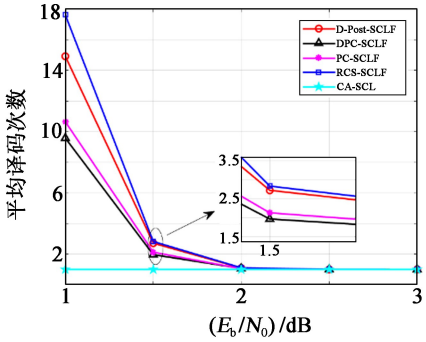


图 8　不同译码算法的复杂度

综上所述，本文所提出的 DPC-SCLF 译码算法在低信噪比区域能够在几乎不增加误码率的情况下拥有更低的复杂度，并且在中高信噪比区域具有更好误码性能。

5　结束语

本文所构造的关键集和分布式奇偶校验结构能够有效缩小译码错误比特的搜索范围，精确错误比特的位置，提高误码性能，减少重译码次数。同时在译码过程中融入了提前终止译码进程操作，减少了译码比特数，降低了译码复杂度，并且译码算法中的路径剪枝操作能够有效减少错误路径对正确路径的竞争，提高正确路径保留到译码结束的概率。通过仿真分析，本文所提出的 DPC-SCLF 译码算法具有一定的优越性。

参考文献：

[1] 陈发堂，赵昊明，石　丹，等. 低时间复杂度的极化码译码算法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2021，33(4)：571-576.
Chen Fatang，Zhao Haoming，Shi Dan，et al. Decoding algorithm of polarization code with low time complexity[J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)，2021，33(4)：571-576.

[2] 李小文，李文彬. 一种简化的极化码串行消除列表译码算法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2019，31(4)：488-494.
Li Xiaowen，Li Wenbin. A simplified successive cancellation list decoding algorithm for polar codes[J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)，2019，31(4)：488-494.

[3] Niu K，Chen K. CRC-aided decoding of polar codes[J]. IEEE Communications Lett.，2012，16(10)：1668-1671.

[4] Dai B，Gao C Y，Yan Z Y，et al. Parity check aided SC-Flip decoding algorithms for polar codes[J]. IEEE Trans. on Vehicular Technol.，2021，70(10)：10359-10368.

[5] 刘　伟，段红光. 极化码自适应连续消除列表比特翻转译码算法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2021，33(1)：87-93.
Liu Wei，Duan Hongguang. Adaptive successive cancellation list bit-flip decoding of polar codes[J]. J. of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition)，2021，33(1)：87-93.

[6] Yu Y R，Pan Z W，Liu N，et al. Successive cancellation list bit-flip decoder for polar codes[C]// 2018 10th Inter. Conf. on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP). Hangzhou：IEEE Press，2018：1-6.

[7] Wang Z X，Pan Y H，Lin Y H. Post-processing for CRC-aided successive cancellation list decoding of polar codes[J]. IEEE Communications Lett.，2020，24(7)：1395-1399.

[8] Pan Y H，Wang C H，Ueng Y L. Generalized SCL-flip decoding of polar codes[C]// GLOBECOM 2020-2020 IEEE Global Communications Conference. Taipei：IEEE Press，2020：1-6.

[9] You W，Yuan J G，Yu L F. An improved AS-SCLF decoding algorithm of polar codes based on the assigned set[J]. Optoelectronics Lett.，2022，18(11)：694-698.

[10] Balatsoukas-Stimming A，Parizi M B，Burg A. LLR-based successive cancellation list decoding of polar codes[J]. IEEE Trans. on Signal Processing，2015，63(19)：5165-5179.

[11] 刘顺兰，王　燕. 一种基于奇偶校验码级联极化码的低复杂度译码算法[J]. 电子与信息学报，2022，44(2)：637-645.
Liu Shunlan，Wang Yan. A low-complexity decoding algorithm based on parity-check-concatenated polar codes[J]. J. of Electronics & Information Technol.，2022，44(2)：637-645.

[12] 于永润. 极化码编译码技术研究[D]. 南京：东南大学，2019.
Yu Yongrun. Investigations on the construction and decoding of polar codes[D]. Nanjing：Southeast University，2019.

作者简介：

袁建国(1968—)，男，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为通信系统中极化码与 LDPC 码的编译码技术以及 OFDM 技术。