光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.20250427002

基于Fibonacci-Lucas序列的8环QC-LDPC码新颖构造方法

袁建国*，伏博文，杨　婷，胡　坤
（重庆邮电大学 光电工程学院，重庆 400065）

摘　要： 针对当前准循环低密度奇偶校验（Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check，QC-LDPC）码存在短环结构并且其纠错性能差的问题，文章基于斐波那契-卢卡斯序列（Fibonacci-Lucas Sequence，FLS）提出一种围长至少为8的QC-LDPC码新颖构造方法。该方法首先利用Fibonacci-Lucas序列构成一个满足无4环条件的指数矩阵，再利用搜索算法搜索出让该指数矩阵满足无6环条件的元素得到一个递增序列，构造相应的指数矩阵，得到其奇偶校验矩阵。仿真结果表明，当误码率为1×10^{-6}时，所构造的FLS-QC-LDPC码相较于其他三种具有相同码率和码长的QC-LDPC码，其净编码增益得到了明显改善，表现出较好的纠错性能。此外，该构造方法灵活多变，支持多种码长和码率选择，同时保持较低的计算复杂度，高效且适应性强。

关键词： 准循环低密度奇偶校验码；Fibonacci-Lucas序列；搜索算法；净编码增益
中图分类号： TN911.22　**文章编号：** 1001－5868(2025)03－0543－07

A Novel Construction Method with Girth-8 of QC-LDPC Codes Based on Fibonacci-Lucas Sequences

YUAN Jianguo, FU Bowen, YANG Ting, HU Kun
(**School of Optoelectronic Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, CHN**)

Abstract: To mitigate the short cycle structure and poor error correction performance of the current quasi-cyclic low-density parity-check (QC-LDPC) codes, a novel construction method, based on the Fibonacci-Lucas sequence (FLS), is proposed for QC-LDPC codes with girth-8. In this construction method, the FLS is used to form an exponent matrix without girth-4, and then, a search algorithm identifies elements that eliminate girth-6 from the exponent matrix, yielding an incremental sequence. The corresponding exponent matrix is constructed to obtain its parity check matrix. Simulation results show that compared with three other QC-LDPC codes with the same code-rate and code-length, the constructed FLS-QC-LDPC code significantly improves the net coding gain at a bit error rate of 1×10^{-6}, outperforming its counterparts in terms of error correction. In addition, the proposed construction method can flexibly select the code length and rate while maintaining a low computational complexity, which is efficient and adaptable.

Key words: quasi-cyclic low-density parity-check codes; Fibonacci-Lucas sequences; search algorithms; net coding gain

收稿日期：2025－04－27.
基金项目：国家自然科学基金项目（U21A20447，61971079）.
*通信作者：袁建国

0 引言

在无线通信中，信号在传输途中会存在干扰与衰落现象，严重影响信号的完整性，引发误码问题。为有效克服这些问题，信道编码技术被广泛用于改善通信质量[1-2]。其中，准循环低密度奇偶校验（Quasi-Cyclic Low-Density Parity-Check，QC-LDPC）码作为一种重要的信道编码技术，因其良好的译码性能和易于硬件实现的优点，在理论研究和工程实践中受到了越来越多的关注[3-5]。通过译码迭代过程，较长的QC-LDPC码可以接近理论极限，然而，当码长为中等或较短时，则需要设计奇偶校验矩阵（Parity-Check Matrices，PCMs）才能获得较好的性能。奇偶校验矩阵是通过使用循环置换子矩阵扩展指数矩阵得到，其中循环置换子矩阵是通过单位矩阵移位若干次而来。因此，移位因子的设计至关重要，设计奇偶校验矩阵就等同于设计指数矩阵。

通常认为，消除这类码Tanner图中的短环是提高性能的有效途径[6]，沿着该方向构造QC-LDPC码的方法可分为两类：一类是设计合适的计算机搜索算法，另一类是基于公式的显式构造方法。本文基于斐波那契-卢卡斯序列（Fibonacci-Lucas Sequence，FLS）提出一种环长至少为8的QC-LDPC码新颖构造方法，该编码方案可灵活选择码长和码率，构造简便、计算复杂度低、适合硬件快速实现，且能有效避免错误平层现象，提升系统整体性能。

1 QC-LDPC码简介

QC-LDPC码相较于传统的LDPC码，其显著特点在于引入了“准循环”结构，这一特性使得QC-LDPC码的奇偶校验矩阵在构造上更为高效和有序。具体来说，QC-LDPC码的奇偶校验矩阵可以通过循环置换矩阵（Circular Permutation Matrix，CPM）扩展指数矩阵（Exponent Matrix，EM）来构建。其中指数矩阵中无穷大的元素用零矩阵替代，等于零的元素用单位矩阵替代，其余元素用循环置换矩阵替代。扩展得到的奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$如公式（1）所示：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{a(1,1)} & \boldsymbol{I}_{a(1,2)} & \cdots & \boldsymbol{I}_{a(1,n)} \\ \boldsymbol{I}_{a(2,1)} & \boldsymbol{I}_{a(2,2)} & \cdots & \boldsymbol{I}_{a(2,n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{I}_{a(m,1)} & \boldsymbol{I}_{a(m,2)} & \cdots & \boldsymbol{I}_{a(m,n)} \end{bmatrix}_{qm\times qn} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{I}_{a(i,j)}$为q阶循环置换矩阵；$a(i,j)$表示移位系数，$a(i,j)\in\{\infty,0,1,2,\cdots,q-1\}$，其中$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$。奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$的码长为$qn$，码率为$(n-m)/n$。

若$a(i,j)=\infty$，则$\boldsymbol{I}_{a(i,j)}$用零矩阵代替；若$a(i,j)=0$，则$\boldsymbol{I}_{a(i,j)}$用单位矩阵代替；若$a(i,j)\neq\infty$且$a(i,j)\neq0$，则$\boldsymbol{I}_{a(i,j)}$用向左或向右循环移位的单位矩阵代替。$\boldsymbol{I}_{a(i,j)}$作为大小为$q\times q$的循环置换矩阵，体现出QC-LDPC码的准循环特性，其特点在于矩阵的行与列之间的循环移位关系。这种关系使得矩阵的每一行（或列）通过循环移动一定的位数即可得到下一行（或列），且最后一行（或列）循环移动后等价于第一行（或列），形成了一种闭合的循环结构。

若循环置换矩阵的阶数较小，可直接用奇偶校验矩阵表示。但在大多数情况下，QC-LDPC码的码长较长，循环置换矩阵的阶数一般可达几十甚至几百。当描述QC-LDPC码时，由于其奇偶校验矩阵的庞大和复杂性，直接描述并不方便。因此，引入指数矩阵$\boldsymbol{E}$来更直观地表达QC-LDPC码的奇偶校验矩阵形式，是一种高效且常用的方法。指数矩阵$\boldsymbol{E}$如公式（2）所示：

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} a(1,1) & a(1,2) & \cdots & a(1,n) \\ a(2,1) & a(2,2) & \cdots & a(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(m,1) & a(m,2) & \cdots & a(m,n) \end{bmatrix}_{m\times n} \tag{2}$$

将指数矩阵的每个元素扩展q阶就能得到奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$，q也称为扩展因子。校验矩阵中的环可以利用对应的指数矩阵中的移位系数表示，存在以下定理。

定理1[3]：公式（2）所示QC-LDPC码的指数矩阵存在$2g$环的充分必要条件为公式（3）成立。

$$\sum_{k=0}^{g-1}\left(a(i_l,j_l)-a(i_l,j_{l+1})\right)\equiv0(\bmod q) \tag{3}$$

式中，$j_0=j_n$，$i_l\neq i_{l+1}$，$j_l\neq j_{l+1}$，$0\leqslant i_l<m$，$0\leqslant j_l<n$，其中$0\leqslant l\leqslant g-1$。

2 Fibonacci-Lucas序列简介

2.1 Fibonacci-Lucas序列的定义

斐波那契数列的定义：对于数列$F(n)$，n为自然数，若数列满足$F(n)=F(n-1)+F(n-2)(n\geqslant$

$2, n\in N$)，且 $F(0)=0, F(1)=1$，则称其为斐波那契数列。数列 $F(n)$ 的分布形式如 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$。

卢卡斯数列的定义：对于数列 $L(a)$，$a\geqslant 1$，且 a 为自然数，若数列满足 $L(a)=L(a-1)+L(a-2)$（$a\geqslant 3, a\in N$）且 $L(1)=2, L(2)=1$，则称其为卢卡斯数列。数列 $L(a)$ 的分布形式如 $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \cdots$。

斐波那契-卢卡斯数列定义：Fibonacci-Lucas序列可由如下递归方式定义为 $F(b)=F(b-1)+F(b-2)$（$b\geqslant 2$，$b\in N$）。

2.2　Fibonacci-Lucas序列定理

定理2[7]：对于Fibonacci-Lucas序列 $F(i)$，$f(i)$ 为数列中第 i 个数的数值，若 $j>i$，且 $j, i, k\in N$，则有 $f(j+k)-f(j)\geqslant f(i+k)-f(i)$。

3　基于Fibonacci-Lucas序列的QC-LDPC码构造方法

3.1　构造方法

首先利用Fibonacci-Lucas序列构造一个 $3\times L$ 的指数矩阵，该指数矩阵无4环，再利用搜索算法处理该指数矩阵使其无6环，其具体的构造步骤如下：

步骤1：通过Fibonacci-Lucas序列构造满足无4环条件的（3，L）QC-LDPC码指数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H})$，如公式（4）所示。指数矩阵第一行元素全为0，即 $\boldsymbol{A}(0,s)=0, 0\leqslant s\leqslant L-1$。第二、三行的元素通过Fibonacci-Lucas序列得到，可表达为 $\boldsymbol{A}(i,s)=F(2i+s)$，其中 $1\leqslant i\leqslant 2, 0\leqslant s\leqslant L-1$。

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H})=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F(2\times 1+0) & F(2\times 1+1) & \cdots & F(2\times 1+L-2) & F(2\times 1+L-1) \\ F(2\times 2+0) & F(2\times 2+1) & \cdots & F(2\times 2+L-2) & F(2\times 2+L-1) \end{bmatrix}_{3\times L} \tag{4}$$

因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H})$ 的第一行元素全为零，第二行和第三行满足Fibonacci-Lucas序列单调递增的性质，与第一行之间不存在4环，所以仅考虑第二行和第三行之间是否存在4环。4环的存在形式如图1，其中 $i_1<i_2, j_1<j_2$。

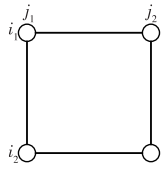


图1　4环结构

由定理2可知 $F(2i_2+j_2)-F(2i_2+j_1)>F(2i_1+j_2)-F(2i_1+j_1)$，因此：

$$a(i_1,j_1)-a(i_1,j_2)+a(i_2,j_2)-a(i_2,j_1)=F(2i_1+j_1)-F(2i_1+j_2)+F(2i_2+j_2)-F(2i_2+j_1)>0 \tag{5}$$

$$a(i_1,j_1)-a(i_1,j_2)+a(i_2,j_2)-a(i_2,j_1)<a(i_2,j_2)-a(i_2,j_1)<a(i_2,j_2)<q \tag{6}$$

由公式（5）和（6）可得 $a(i_1,j_1)-a(i_1,j_2)+a(i_2,j_2)-a(i_2,j_1)\neq 0(\mathrm{mod}q)$，不满足定理1中4环存在的条件，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H})$ 中无4环结构。

步骤2：结合环长存在定理，编写一种特定的搜索算法来构造序列 $d_i=\{d_0, d_1, \cdots, d_{L-1}\}$，且 $d_0<d_1<\cdots<d_{L-1}$，再将序列 $d_i=\{d_0, d_1, \cdots, d_{L-1}\}$ 同时加到 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H})$ 的第二、三行得到 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$，如公式（7）所示。

因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{H})$ 的第二、三行之间无4环，这两行加上相同的序列 d_i 后依然不会存在4环，所以该搜索算法只需保证 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$ 中不存在6环即可。具体步骤由下节给出。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ F(2\times 1+0)+d_0 & F(2\times 1+1)+d_1 & \cdots & F(2\times 1+L-2)+d_{L-2} \\ F(2\times 2+0)+d_0 & F(2\times 2+1)+d_1 & \cdots & F(2\times 2+L-2)+d_{L-2} \end{bmatrix}_{3\times L} \tag{7}$$

步骤3：通过单位矩阵和循环置换矩阵来扩展 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$ 得到 $3q\times Lq$ 的校验矩阵 $\boldsymbol{H}$。

通过上述3个步骤，可构造出一类码长为 qL，码率可变的QC-LDPC码。

3.2　一种避免6环的新颖搜索算法

为消除指数矩阵 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$ 中的6环，设计了一种避免6环的新颖搜索算法，能提供大量不等价候选码，使得构造出的QC-LDPC码环长为8。由于指数矩阵首行元素均为0，为进一步简化搜索算法，可将图2的六种6环结构化简为图3的六种特殊的4环结构。

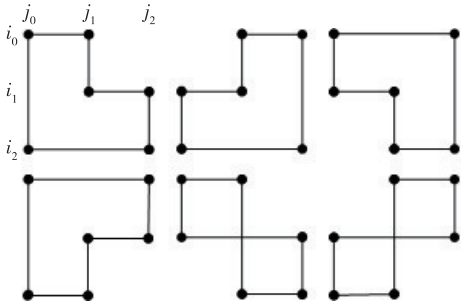


图2 6环结构

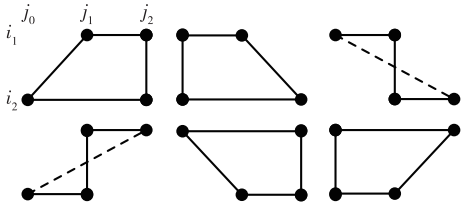


图3 特殊的4环结构

那么由定理1得出的公式(3)可等价为公式(8)：

$$\sum_{s=1}^{2}(e(i_s,j_{s-1})-e(i_s,j_s))=0(\mathrm{mod}\,q) \tag{8}$$

式中，$0<i_s<m$，$0\leqslant j_s<n$。再根据这六种特殊的4环结构编写搜索算法，该算法流程如下：

(1) 根据所需要的码长，确定扩展因子q的大小。

(2) 确定搜索区间$[1,z]$，其中$z<q-F(4+L-1)$。为了降低搜索难度，当$L<9$时，考虑先在区间$[1,15]$内确定序列d_i的前三个元素$\{d_0,d_1,d_2\}$，使$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$不满足公式(8)，随后在区间$[16,z]$中依次搜索剩下的元素，构成序列$d_i=\{d_0,d_1,\cdots,d_{L-1}\}$；当$L>=9$时，考虑在区间$[1,15]$内确定集序列$d_i$的前四个元素$\{d_0,d_1,d_2,d_3\}$，使$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$不满足公式(8)，随后在区间$[16,z]$中依次搜索剩下的元素，构成序列$d_i=\{d_0,d_1,\cdots,d_{L-1}\}$，$d_0<d_1<\cdots<d_{L-1}$。若在该区间范围内无法找到满足条件的元素，可以适当增大z值，以扩大搜索区间。综上，此搜索算法可以快速找到合适的元素并使得元素的选择更加灵活，但随着z值的增大会使搜索复杂度有所增加。

(3) 用步骤(2)中得到的序列d_i构造公式(7)所示的矩阵$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$，并检查$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$是否存在特殊的4环，即$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$中的元素是否均不满足公式(8)。若均不满足公式(8)则确定序列$d_i=\{d_0,d_1,\cdots,d_{L-1}\}$，否则重复步骤(2)。

3.3 无4和6环证明

3.3.1 无4环证明

因为指数矩阵$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$的第一行元素全为零，第二行和第三行与第一行之间均不存在4环，所以仅考虑第二行和第三行之间是否存在4环。4环的存在形式如图1所示，其中$i_1<i_2,j_1<j_2$。

$$\begin{aligned}&e(i_1,j_1)-e(i_1,j_2)+e(i_2,j_2)-e(i_2,j_1)=\\&\quad(F(2i_1+j_1)+d_{j_1})-(F(2i_1+j_2)+d_{j_2})+\\&\quad(F(2i_2+j_2)+d_{j_2})-(F(2i_2+j_1)+d_{j_1})=\\&\quad F(2i_1+j_1)-F(2i_1+j_2)+F(2i_2+j_2)-\\&\quad F(2i_2+j_1)>0\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&e(i_1,j_1)-e(i_1,j_2)+e(i_2,j_2)-e(i_2,j_1)<\\&\quad e(i_2,j_2)-e(i_2,j_1)<e(i_2,j_2)<q\end{aligned} \tag{10}$$

由公式(9)和(10)可得$e(i_1,j_1)-e(i_1,j_2)+e(i_2,j_2)-e(i_2,j_1)\neq 0(\mathrm{mod}q)$，因此第二行和第三行之间不存在4环，指数矩阵$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$中无4环。

3.3.2 无6环证明

根据3.2节中的公式(8)可得：

$$\begin{aligned}&e(i_1,j_0)-e(i_1,j_1)+e(i_2,j_1)-e(i_2,j_2)=\\&\quad(F(2i_1+j_0)+d_{j_0})-(F(2i_1+j_1)+d_{j_1})+\\&\quad(F(2i_2+j_1)+d_{j_1})-(F(2i_2+j_2)+d_{j_2})=\\&\quad(F(2i_1+j_0)-F(2i_1+j_1)+F(2i_2+j_1)-\\&\quad F(2i_2+j_2))+d_{j_0}-d_{j_2}\end{aligned} \tag{11}$$

序列d_i中的元素是在$[1,z]$中取得，根据公式(11)可得：

$$\begin{aligned}&e(i_1,j_0)-e(i_1,j_1)+e(i_2,j_1)-e(i_2,j_2)<\\&\quad F(2i_1+j_0)+z\leqslant F(4+L-1)+z<q\end{aligned} \tag{12}$$

同理可得，另外五种可能存在的6环结构均满足公式(12)。

由于根据本设计的搜索算法得出的序列d_i能使公式(11)满足$e(i_1,j_0)-e(i_1,j_1)+e(i_2,j_1)-e(i_2,j_2)>0(\mathrm{mod}\,q)$。因此，当移位系数$q>F(4+L-1)+z$时，$e(i_1,j_0)-e(i_1,j_1)+e(i_2,j_1)-e(i_2,j_2)\neq 0(\mathrm{mod}\,q)$，指数矩阵$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$中不存在6环。

4 仿真结果与复杂度分析

4.1 仿真结果分析

为证明构造的FLS-QC-LDPC码具有更好纠错性能，使用Matlab进行仿真，在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道的仿

真环境下利用二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying, BPSK)进行调制并且采用置信传播(Belief Propagation, BP)算法对其译码。通过以往实验证明,随着译码迭代次数的增加,译码性能会更好,但其译码复杂度也会增加,而译码性能在迭代次数超过50次后提升较小,所以在综合考虑下,选择译码迭代次数为50。

为评估当码率为0.5、码长为1 200时FLS-QC-LDPC码的纠错性能,考虑构造大小为3×6的指数矩阵,即$L=6$,扩展因子q值为200,z取50,通过所设计的搜索算法得到序列$d_i=\{4,5,10,32,38,50\}$。构造出的指数矩阵如公式(13)所示,将该指数矩阵进行扩展即可得到本设计需构造的FLS-QC-LDPC(1 200, 600)码。

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0(\bmod q) & 0(\bmod q) & 0(\bmod q) \\ 7(\bmod q) & 9(\bmod q) & 17(\bmod q) \\ 11(\bmod q) & 16(\bmod q) & 28(\bmod q) \\ 0(\bmod q) & 0(\bmod q) & 0(\bmod q) \\ 43(\bmod q) & 56(\bmod q) & 79(\bmod q) \\ 61(\bmod q) & 85(\bmod q) & 126(\bmod q) \end{bmatrix} \tag{13}$$

将构造的FLS-QC-LDPC(1 200, 600)码与文献[8]基于Stanley序列(Stanley Sequence, SS)构造的环长为8的规则SS-QC-LDPC(1 200, 600)码、文献[9]基于哥隆尺(Golomb Ruler, GR)构造的环长为8的规则GR-QC-LDPC(1 200, 600)码、文献[10]基于不相交差分集(Disjoint Difference Sets, DDS)构造的环长为8的规则DDS-QC-LDPC(1 200, 600)码进行性能对比,性能对比结果如图4所示。由于信噪比的增加,四种码字都会呈现误码率降低的趋势,但本设计的码字利用特殊的构造方法使其具有更为明显的瀑布区。此外,相较于这三种码,当误码率为1×10^{-6}时,本设计构造的FLS-QC-LDPC(1 200, 600)码的编码净增益分别提升了约0.15,0.47,0.62 dB。

为进一步评估所构造的FLS-QC-LDPC码的灵活性,考虑构造大小为3×9的指数矩阵,即$L=9$,扩展因子$q=400$,z取50,得到序列$d_i=\{2,4,6,11,21,34,43,46,47\}$。构造出的指数矩阵如公式(14)所示,将该指数矩阵进行扩展即可得到所需构造的FLS-QC-LDPC(3 600, 2 400)码,其码率为0.67。

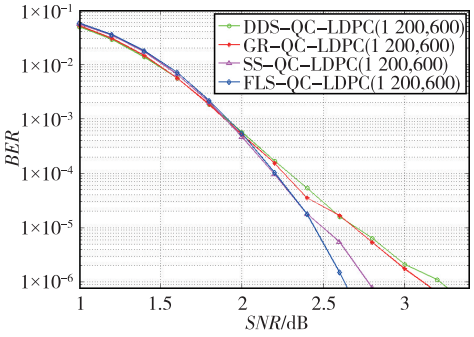


图4　FLS-QC-LDPC(1 200, 600)码与其他码字的纠错性能对比

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 0(\bmod q) & 0(\bmod q) & 0(\bmod q) \\ 5(\bmod q) & 8(\bmod q) & 13(\bmod q) \\ 9(\bmod q) & 15(\bmod q) & 24(\bmod q) \\ 0(\bmod q) & 0(\bmod q) & 0(\bmod q) \\ 22(\bmod q) & 39(\bmod q) & 63(\bmod q) \\ 40(\bmod q) & 68(\bmod q) & 110(\bmod q) \\ 0(\bmod q) & 0(\bmod q) & 0(\bmod q) \\ 90(\bmod q) & 122(\bmod q) & 170(\bmod q) \\ 166(\bmod q) & 245(\bmod q) & 369(\bmod q) \end{bmatrix} \tag{14}$$

将所构造的FLS-QC-LDPC(3 600, 2 400)码与文献[8]基于Stanley序列(Stanley Sequence, SS)构造的环长至少为8的规则SS-QC-LDPC(3 600, 2 400)码、文献[10]基于不相交差分集(Disjoint Difference Sets, DDS)构造的环长为8的规则DDS-QC-LDPC(3 600, 2 400)码、文献[11]基于消除陷阱集和原模图(Protograph, P)构造的环长为8的非规则P-QC-LDPC(3 600, 2 400)码进行性能比较。当信噪比较低时,噪声对误码性能的影响较大,会导致每次仿真的误码率都具有一定的波动,随着信噪比的增大,这种波动会相应减小,这样更能体现出这四种码字的实际误码性能。因此,一般考虑在低误码率下去比较净编码增益。性能对比结果如图5所示,与以上三种码相比,当误码率为1×10^{-6}时,本设计构造的FLS-QC-LDPC(3 600, 2 400)码的编码净增益分别提升了约0.13,0.17,0.32 dB。

综上所述,所构造的FLS-QC-LDPC码在不同码率、码长时的纠错性能均比相对比的其他码更优并且没有出现错误平层现象。

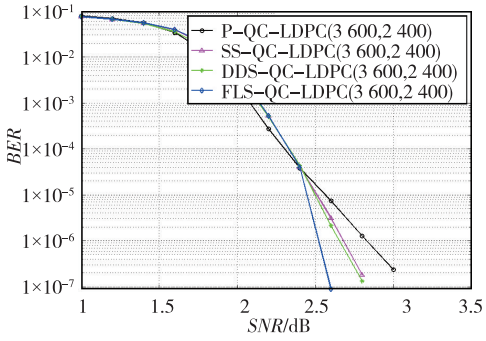


图5 FLS-QC-LDPC(3 600,2 400)码与其他码字的纠错性能对比

4.2 复杂度分析

编码运算复杂度分析主要关注在相同码长和码率下,不同编码方案的运算量差异。对于QC-LDPC码,其编码过程通常涉及生成矩阵的乘法运算。由于生成矩阵的结构决定了计算的复杂度,在编码实现中不同的生成矩阵设计会影响运算效率。

本文与其他四篇参考文献的计算复杂度对比分析如表1所示,所构造的QC-LDPC码与对比文献中构造的码字均依赖于生成矩阵进行编码,因此它们的编码计算复杂度相同,但校验矩阵$\boldsymbol{H}$的构造方法对整体编码效率具有重要影响。首先通过Fibonacci-Lucas序列利用代数构造法构造一个无4环指数矩阵$\boldsymbol{E}$,该指数矩阵的第一行全为0,第二、三行通过Fibonacci-Lucas序列构成;然后通过搜索算法搜索出一组序列加到第二、三行来消除指数矩阵的6环。由于指数矩阵的第一行元素全为零,在搜索过程中可以减少对第一行的遍历,从而其计算复杂度为$O((i-1)j)$,其中i为指数矩阵的行数,j为指数矩阵的列数。文献[8]基于Stanley序列构造了一类(J,L) QC-LDPC码,从Stanley序列中选取L个元素构成集合$a_i=\{a_0,a_1,\cdots a_{L-1}\}$,然后通过搜索枚举在$[0,z]$中搜索出使指数矩阵满足无4和6环的$J$个元素构成集合$b_j=\{b_0,b_1,\cdots,b_{J-1}\}$,通过公式$e_{i,j}=a_ib_j(\mathrm{mod}\,Q)$来构造指数矩阵$\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{Q}$为扩展因子,其计算复杂度为$O(z)$。该构造方法虽然计算复杂度略低,但在搜索时要同时避免存在4和6环,而本文只需要避免存在6环,在搜索过程中的复杂度更低并且本设计的码字具有更好的纠错性能。文献[9]选择利用n阶的哥隆尺序列$b=\{b_0,b_1,\ldots,b_{n-1}\}$构造一个$3\times n$的指数矩阵$\boldsymbol{E}=\left[e(i,j)\right]$,其中$e(i,j)=ib_j(\mathrm{mod}\,P)$,$P>2L$,哥隆尺长度$L=b_{n-1}-b_0$,其计算复杂度为$O(j)$,其所构造码字的复杂度低,但本文所构造码字的纠错性能更优。文献[10]通过将搜索算法得到的两组不相交差集进行相加得到指数矩阵,其搜索算法复杂度较高,计算复杂度为$O(j^4)$,相较于本设计构造方法,其复杂度较高。文献[11]先利用原模图外信息转移算法设定阈值,然后采用分层搜索算法找出超出范围的无叶基本陷阱集结构的最小集合,构造出i行j列的校验矩阵,其计算复杂度为$O(ij)$,高于所设计的码字。

表1 本文与其他参考文献的计算复杂度对比

不同文献	计算复杂度
本文	$O((i-1)j)$
文献[8]	$O(z)$
文献[9]	$O(j)$
文献[10]	$O(j^4)$
文献[11]	$O(ij)$

综上所述,本文所提出的构造方法不但复杂度低且纠错性能良好。

此外,在硬件实现方面,由于本设计构造的QC-LDPC码具有特殊的准循环结构,其校验矩阵由循环移位的小子矩阵构成,这种特殊结构使得其具有存储需求低且能并行处理的优点。QC-LDPC码仅需存储基矩阵和移位值,而非整个大矩阵,节省FPGA或ASIC的存储资源。此外,其编译码都涉及大量的并行性处理操作,其中循环移位操作可通过简单的硬件移位寄存器实现,支持高并行度的编译码,且其硬件连线规则化,能减少布线拥塞,提升芯片面积利用率。在一个QC-LDPC码的编码器中,多个比特可以同时被处理,这有助于提高处理速度。同时,在译码过程中,校验节点和变量节点可以并行地处理数据,从而减少延迟。因此,所构造的QC-LDPC码通过规则化结构、并行化潜力、低存储开销和可扩展性,成为硬件快速实现的理想选择之一。

5 结论

本文基于Fibonacci-Lucas序列设计了一种新颖的搜索算法来构造环长至少为8的QC-LDPC码。该方法确保所构造的QC-LDPC码中完全消除了长度为4和6的短环,避免了这些短环可能带来的解码性能下降问题,使得码长的选择更加灵活。仿真结果显示,所构造的FLS-QC-LDPC(1 200,600)码和FLS-QC-LDPC(3 600, 2 400)码,在相同

条件下与本文所对比的同码率、同码长的其他编码方案相比较时，展现出了显著的净编码增益提升。此外，所设计的避免4和6环的搜索算法较为简单，使得该构造方法的计算复杂度大大降低。

参考文献：

[1] Hong S, Ke J, Wang L. Global design of double protograph LDPC codes for joint source-channel coding [J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(2): 424-427.

[2] 陈发堂，王永航，张翰卿．多归一化因子的LDPC译码算法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2022, 34(1): 59-64.
Chen Fatang, Wang Yonghang, Zhang Hanqing. LDPC decoding algorithm with multiple normalization factors [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2022, 34(1): 59-64.

[3] Amirzade F, Sadeghi M R, Panario D. QC-LDPC codes with large column weight and free of small size ETSs [J]. IEEE Communications Letters, 2022, 26(3): 500-504.

[4] 张晓芳，黎　勇．GPU的QC-LDPC码译码器设计与实现[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2021, 33(4): 577-583.
Zhang Xiaofang, Li Yong. Design and implementation of QC-LDPC decoder based on GPU [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2021, 33(4): 577-583.

[5] Wang J, Yuan S, Zhou Y, et al. Codec implementation of QC-LDPC code in CCSDS near-earth standard [C]// 2020 5th International Conference on Computer and Communication Systems (ICCCS), 2020: 575-579.

[6] Zhang L, Wang J. Construction of QC-LDPC codes from Sidon sequence using permutation and segmentation [J]. IEEE Communications Letters, 2022, 26(8): 1710-1714.

[7] Fontán F P, Mariño Espiñeira P. Modeling the Wireless Propagation Channel: A Simulation Approach with MATLAB® [M]. New York: John Wiley & Sons, 2008.

[8] 袁建国，蒯家松，张帅康．基于Stanley序列的QC-LDPC码新颖构造方法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2023, 35(3): 427-433.
Yuan Jianguo, Kuai Jiasong, Zhang Shuaikang. Novel construction method on QC-LDPC codes based on the Stanley sequence [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2023, 35(3): 427-433.

[9] Kim I, Song H Y. A construction for girth-8 QC-LDPC codes using Golomb rulers [J]. Electronics Letters, 2022, 58(15): 582-584.

[10] Zhang G, Ni M, Hu Y, et al. Quasi-cyclic LDPC codes with girth at least eight based on disjoint difference sets [J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(1): 55-59.

[11] Karimi B, Banihashemi A H. Construction of irregular protograph-based QC-LDPC codes with low error floor [J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(1): 3-18.

作者简介：

袁建国(1968—)，男，重庆市人，博士，教授，硕士生导师，主要研究方向为通信系统中LDPC码与极化码编译码技术以及OFDM技术。