光电技术及应用

DOI：10.16818/j.issn1001－5868.20251231001

基于Stanley序列与遗传算法的短码长QC-LDPC码构造方法

袁建国*，胡　坤，熊龙宇

（重庆邮电大学 集成电路学院，重庆 400065）

摘　要： 针对准循环低密度奇偶校验（QC-LDPC）码易存在短环结构且在短码长易出现小陷阱集导致错误平层的问题，基于Stanley序列的特性，结合遗传算法提出一种环长至少为8的短码长QC-LDPC码构造方法。该方法首先利用Stanley序列构造指数矩阵的前两行，借助其序列特性天然避免四环；再通过引入遗传算法搜索第三行元素，在确保无四六环的同时，对（5，3）和（6，4）等危害性小陷阱集的数量进行最小化；最后将指数矩阵扩展为奇偶校验矩阵，完成QC-LDPC码构造。仿真结果表明，在误码率为1×10^{-6}时，所构造的短码长SS-QC-LDPC码相较于其他三种具有相同码率和码长的QC-LDPC码型，具有更好的净编码增益且没有出现错误平层现象。因此，所提方法的纠错性能更佳且短码长更易于编译码实现。

关键词： 准循环低密度奇偶校验码；Stanley序列；遗传算法；短码长

中图分类号： TN911.22　**文章编号：** 1001－5868(2026)03－0589－06

Construction Method of Short Code-Length QC-LDPC Codes Based on Stanley Sequences and Genetic Algorithm

YUAN Jianguo, HU Kun, XIONG Longyu

(**School of Optoelectronic Engineering, Chongqing university of posts and telecommunications, Chongqing 400065, CHN**)

Abstract: Aiming at the problems of short-cycle structures in current quasi-cyclic low-density parity-check (QC-LDPC) codes and the occurrence of small trapping sets in short code lengths, which lead to the error floor phenomenon, based on the characteristics of Stanley sequences and combined with a genetic algorithm, a novel construction method for short code-length QC-LDPC codes with girth-8 is proposed. First, this method constructs the first two rows of the exponent matrix by using Stanley sequences, which naturally avoids 4-cycles by leveraging the inherent properties of the Stanley sequence. Then, a genetic algorithm is introduced to search for the elements of the third row, ensuring the absence of both 4-cycles and 6-cycles while minimizing the number of harmful small trapping sets such as (5, 3) and (6, 4). Finally, the exponent matrix is expanded into a parity-check matrix to complete the construction of the QC-LDPC code. Simulation results show that the constructed short code-length SS-QC-LDPC codes can achieve better net coding gain and no error floor phenomenon compared with the other three types of QC-LDPC codes with the same code rate and code length at a bit error rate of 1×10^{-6}. Therefore, the constructed QC-LDPC code has better error correction performance, and its short code length makes it easier to implement encoding and decoding.

收稿日期：2025－12－31.

基金项目：国家自然科学基金项目（U21A20447，61971079）.

* **通信作者：**袁建国

Key words: quasi-cyclic low-density parity-check codes; Stanley sequences; genetic algorithms; short code-length

0 引言

在无线通信、卫星通信及5G等现代通信系统中,信号传输面临干扰、衰落等问题,易引发误码,严重影响通信可靠性[1-2]。信道编码技术作为抵御干扰、降低误码率的核心方法,其性能直接决定系统传输质量。准循环低密度奇偶校验(QC-LDPC)码凭借其准循环结构带来的高效并行硬件实现、较低的编译码复杂度和出色的纠错性能,成为信道编码领域的研究热点,被广泛应用于各类通信场景[3-5]。

短码长QC-LDPC码兼具低时延、易实现、适配实时应用场景等突出优势,因此设计高性能短码长QC-LDPC码,对高实时性、高可靠性通信的物理层设计而言具有重要价值。目前,许多研究集中在消除Tanner图中的短环以提升QC-LDPC码的性能[6]。而在短码长QC-LDPC码中,除短环的影响外,Tanner图中的小陷阱集(如(5,3),(6,4)陷阱集)密集也会导致码字性能不佳,严重限制QC-LDPC码在高可靠性场景中的应用[7]。因此,构造无四环、六环且小陷阱集数量少的短码长QC-LDPC码,成为提升其性能的核心需求。

本文针对短码长QC-LDPC码中存在短环和陷阱集密集的问题,基于Stanley序列结合遗传算法,提出一种环长至少为8且陷阱集数量较少的QC-LDPC码新颖构造方法。该编码方案构造简便,适合硬件快速实现,且能有效避免错误平层现象,提升系统整体性能。

1 QC-LDPC码

QC-LDPC码是一类具有“准循环”特性的LDPC码。QC-LDPC码的构造可以用指数矩阵$\boldsymbol{E}$来实现。指数矩阵$\boldsymbol{E}$是一个$J\times L$矩阵,其元素由$e(i,j)$表示,其中i是行索引,j是列索引。指数矩阵$\boldsymbol{E}$如式(1)所示:

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} e_{(0,0)} & e_{(0,1)} & \cdots & e_{(1,j-1)} \\ e_{(1,0)} & e_{(1,1)} & \cdots & e_{(1,j-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{(i-1,0)} & e_{(i-1,1)} & \cdots & e_{(i-1,j-1)} \end{bmatrix}_{J\times L} \tag{1}$$

为了构造$\boldsymbol{H}$矩阵,可以将指数矩阵$\boldsymbol{E}$的(i,j)位置替换为$\boldsymbol{I}_{e(i,j)}$,得到的奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$如式(2)所示:

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{e(0,0)} & \boldsymbol{I}_{e(0,1)} & \cdots & \boldsymbol{I}_{e(0,j-1)} \\ \boldsymbol{I}_{e(1,0)} & \boldsymbol{I}_{e(1,1)} & \cdots & \boldsymbol{I}_{e(1,j-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{I}_{e(i-1,0)} & \boldsymbol{I}_{e(i-1,1)} & \cdots & \boldsymbol{I}_{e(i-1,j-1)} \end{bmatrix}_{pJ\times pL} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{I}_{e(i,j)}$是一个循环移位$e(i,j)$次的$p\times p$单位矩阵。此过程会得到一个大小为$Jp\times Lp$的$\boldsymbol{H}$矩阵,其中p为扩展因子。奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$的码长为pL,码率为$(L-J)/L$。

LDPC码的环长是评估的关键标准,即$\boldsymbol{H}$矩阵的Tanner图中的最短循环长度。短环会对置信传播(BP)译码产生不利影响,因此$\boldsymbol{H}$矩阵具有大环长至关重要。定理1给出了指数矩阵构造的$\boldsymbol{H}$矩阵中的循环条件。

定理1[2]:公式(1)所示QC-LDPC码的指数矩阵存在$2g$环的充分必要条件为公式(3)成立。

$$\sum_{k=0}^{g-1}\left[e(i_l,j_l)-e\left(i_l,j_{l+1}\right)\right]\equiv 0(\bmod q) \tag{3}$$

式中,$j_0=j_n$,$i_l\neq i_{l+1}$,$j_l\neq j_{l+1}$,$0\leqslant i_l<m$,$0\leqslant j_l<n$,其中$0\leqslant l\leqslant g-1$。

2 Stanley序列

对于一个递增的整数序列,如果从该序列中任意选择3个元素,无法形成等差数列,则称该整数序列为3-Free Sets,而Stanley序列是由贪婪算法构造的3-Free Sets。

文献[8]中证明了在列重$J=3$的情况下,Stanley序列与满足最大公约数(GCD)条件序列的等价性。定理2为最大公约数条件。

定理2:设x,y和t为三个行索引值,且$0\leqslant x<y<t\leqslant J-1$,如果对所有的三元组$\left(d_x,d_y,d_t\right)$均能够使公式(4)成立,在扩展系数$P\geqslant(d_{J-1}-d_0)(L-1)+1$的条件下,由三元组构造出的QC-LDPC码环长至少为8。

$$\left(d_t-d_x\right)/\gcd\left(d_t-d_x,d_y-d_x\right)\geqslant L \tag{4}$$

式中,$\gcd\left(d_t-d_x,d_y-d_x\right)$表示为数$d_t-d_x$和数$d_y-d_x$的GCD。

文献[8]给出一个新的简单显示公式计算Stanley序列。

定理3：对于初始项为0的Stanley序列$S(0)=\{h_k\}_{k>0}$，符号$v_2(k)$表示满足$2^f|k$（k能被2^f整除）条件的最大非负整数f，则序列$S(0)$中第k个元素可以通过公式(5)计算得到，即：

$$h_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(3^{v_2(i)}+1\right) \tag{5}$$

3　陷阱集

LDPC码中陷阱集是导致其出现错误平层的主要原因。如图1所示，在一个(4,4)陷阱集的Tanner图中，用●表示变量节点，■表示奇度校验节点，□表示偶度校验节点。

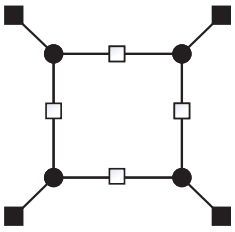
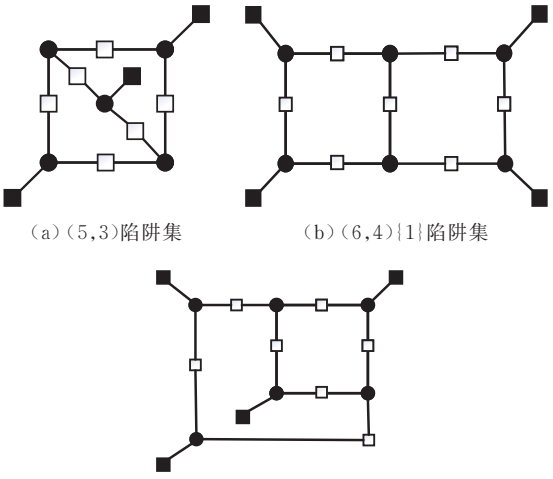


图1　(4,4)陷阱集的图形表示

如果一个陷阱集的关联结构可以通过在另一个陷阱集（其父集）的关联结构上添加线条得到，那么这个陷阱集就是另一个陷阱集的子集。图2分别展示了几种由(4,4)陷阱集演化的陷阱集。



(a)(5,3)陷阱集　　(b)(6,4){1}陷阱集

(c)(6,4){2}陷阱集

图2　从(4,4)陷阱集得到的(5,3)和(6,4)陷阱集

一个陷阱集Γ的危害性取决于其临界数和诱导集的数量。图2(a)中的(5,3)陷阱集是通过向图1中的(4,4)陷阱集添加一个变量节点得到，其临界数为3，而(4,4)陷阱集的临界数为4。因此，(5,3)陷阱集比(4,4)陷阱集更有害。图2(b)和图2(c)中所示的两个(6,4)陷阱集是引入了一些基数为5的额外诱导集，故(6,4)陷阱集比孤立的(4,4)陷阱集更有害。

此外，陷阱集不同子图的父子关系可以用来简化陷阱集类的枚举流程。如前文所述，(5,3)陷阱集的临界数为3，属于短码长LDPC码中必须优先规避的高危害性陷阱集。由于(6,2)，(6,0)和(7,1)陷阱集属于(5,3)陷阱集的子节点，仅仅通过避免(5,3)陷阱集，就可以确保避免上述三类子陷阱集。

4　一种新颖的QC-LDPC码构造方法

4.1　构造方法

首先构造一个维数为$3\times L$的指数矩阵$\boldsymbol{E}$，本文中指数矩阵的第一行和第二行元素都基于Stanley的特殊性质得出，第三行元素则由所设计的搜索算法得出，具体构造步骤如下。

步骤1：根据目标码长和指数矩阵的列数，确定循环置换矩阵的维数大小，即扩展因子p。

步骤2：选择一个Stanley序列$b=\{b_0,b_1,\cdots,b_{n-1}\}$，其中$n>3$。

步骤3：构造指数矩阵$\boldsymbol{E}=e(i,j)$的前两行，其中$e(i,j)=(i+1)b_j$，$i=0,1$以及$j=0,1,\cdots,n-1$。整数$e(i,j)$必须在$0\leqslant e(i,j)\leqslant p-1$范围内。

步骤4：结合环长定理与陷阱集特性，设计一种遗传算法进行搜索，得到一个集合$c=\{c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}\}$，集合内所有元素均为非负整数，且$n=L-1$。将集合$c$中的元素作为矩阵第三行的元素，使得校验矩阵中无四六环的同时只有较少的陷阱集。具体步骤由4.2节给出。

步骤5：指数矩阵中的0元素用大小为$p\times p$的单位矩阵替换，非0元素为循环置换矩阵的移位系数，即将大小为$p\times p$的单位矩阵向右循环移位对应位数，扩展后得到大小为$3p\times Lp$的奇偶校验矩阵$\boldsymbol{H}$。

通过上述5个步骤，可构造出一类列重为3，环长为8的短码长QC-LDPC码。通过改变L的大小，可以使码率灵活可变；改变p的大小，可以构造出不同码长的QC-LDPC码。

4.2　遗传算法的引入

为在避免四六环的同时减少陷阱集的数量，本文引入遗传算法搜索第三行序列。遗传算法是一种模拟生物进化过程的全局优化算法，通过模仿自然选

择、交叉、变异等生物遗传机制，在解空间中搜索最优解。其原理是模拟“适者生存”的自然法则，将待优化问题的解编码为“染色体”（个体），通过种群迭代（选择、交叉、变异）逐步筛选出适应度高的个体，最终逼近最优解。具体遗传算法见表1。

表1 遗传算法

输入：种群规模pop_size，进化代数M，交叉概率crossover_rate，变异概率mutation_rate
1. population→生成pop_size个个体（每个个体为第三行t个移位值，且对应校验矩阵无6环） 2. best_fit=Inf 3. for i=0:M 4. for idx=1:pop_size 5. 计算每个个体适应度$f(E_{idx})$ 6. end for 7. [min_fit, min_idx]=min(fitness)； 8. if min_fit<best_fit 9. best_fit=min_fit 10. $E_{best}=E_{min_fit}$ 11. end if 12. 选择操作：保留elite_size个精英个体，剩余个体通过锦标赛选择 13. 交叉操作：对非精英个体采用crossover_rate概率执行单点交叉n 14. 变异操作：对非精英个体以mutation_rate概率随机变异移位值 15. 约束修复：若个体对应矩阵含四六环，则重新输出个体直至无四六环 16. 更新种群：population←newpopulation 17. end for
输出：E_{best}

其中目标函数$f(x)$定义为：

$$f(x)=\sum_{(a,b)\in S} n_{a,b} \tag{6}$$

式中，S为要减少的主要小陷阱集集合，$n_{a,b}$为校验矩阵中(a,b)陷阱集的数量。本文主要目标是减少危害性较大的小陷阱集，选择$S=\{(5,3),(6,4)\}$为目标陷阱集进行搜索。结合遗传算法可避免陷入局部最优解，有效减少目标陷阱集数量。

4.3 无四六环证明

首先，证明前两行不存在四环。图3中给出了Tanner图中四环存在的结构。

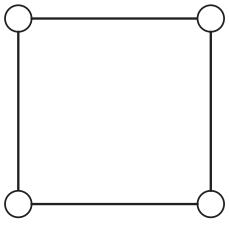


图3 四环结构

若校验矩阵对应的Tanner图中存在四环，由环长定理公式可知，需满足公式（7）：

$$\left(e_{i_0,j_0}-e_{i_0,j_1}\right)+\left(e_{i_1,j_1}-e_{i_1,j_2}\right)=0\left(\mathrm{mod}\,p\right) \tag{7}$$

由于在指数矩阵$\boldsymbol{E}$前两行有$e(i,j)=(i+1)b_j(\mathrm{mod}\,p)$，则公式（7）可表示为：

$$\left(e_{i_0,j_0}-e_{i_0,j_1}\right)+2\left(e_{i_0,j_0}-e_{i_0,j_1}\right)=0\left(\mathrm{mod}\,p\right) \tag{8}$$

化简公式（8）可得：

$$e_{i_0,j_0}-e_{i_0,j_1}=0\left(\mathrm{mod}\,p\right) \tag{9}$$

由于在Stanley序列中，$b_0\geqslant 0$，且$b_0<b_1<b_2<\cdots<b_{n-1}$，显然公式（9）不成立，与四环存在条件相矛盾。因此，指数矩阵$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$的前两行不存在四环，只需考虑第三行是否与前两行构成四六环。由环长定理推导得，存在六环的必要条件为公式（10），即：

$$\begin{aligned}&\left(e_{i_0,j_0}-e_{i_0,j_1}\right)+\left(e_{i_1,j_1}-e_{i_1,j_2}\right)+\\&\left(e_{i_2,j_2}-e_{i_2,j_3}\right)=0\left(\mathrm{mod}\,p\right)\end{aligned} \tag{10}$$

六环有如图4所示的6种结构。在本文所设计的搜索算法中，利用环搜索的办法，引入公式（7）和公式（10）作为约束条件，避免指数矩阵$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$第三行与第一、二行产生如图3、图4中的四六环。故本文的构造方法可构造出的QC-LDPC码环长至少为8。

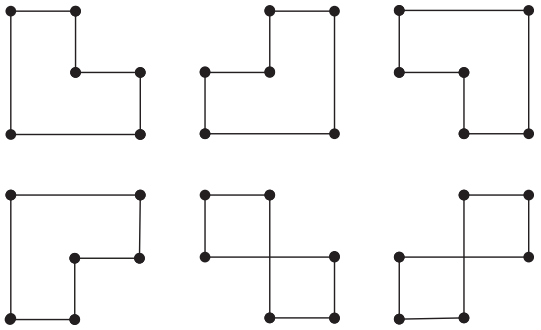


图4 六环结构

5 仿真结果与分析

为验证构造的短码长SS-QC-LDPC码纠错性能的优越性，采用Matlab软件进行仿真。仿真环境为加性高斯白噪声（AWGN）信道，调制方法为二进制相移键控（BPSK），采用BP算法对其译码。在综合考虑下，译码迭代次数选择50次。

为评估当码率为0.4、码长为415时SS-QC-LDPC码的纠错性能，考虑构造大小为3×5的指数矩阵，即$L=5$，扩展因子p值为83，通过所设计的搜索算法得到序列$c_i=\{5,67,42,33,68\}$。构造出的指数矩阵如公式（11）所示，将该指数矩阵进行扩展即可得到本文构造的SS-QC-LDPC（415,166）码。

$$E=\begin{bmatrix}0(\mathrm{mod}\,p) & 1(\mathrm{mod}\,p) & 3(\mathrm{mod}\,p) & 4(\mathrm{mod}\,p) & 9(\mathrm{mod}\,p)\\ 0(\mathrm{mod}\,p) & 2(\mathrm{mod}\,p) & 6(\mathrm{mod}\,p) & 8(\mathrm{mod}\,p) & 18(\mathrm{mod}\,p)\\ 5(\mathrm{mod}\,p) & 67(\mathrm{mod}\,p) & 42(\mathrm{mod}\,p) & 33(\mathrm{mod}\,p) & 68(\mathrm{mod}\,p)\end{bmatrix} \tag{11}$$

将构造的SS-QC-LDPC(415,166)码与几种码长码率相近的QC-LDPC码在相同的仿真环境下进行仿真性能对比分析，结果如图5所示。

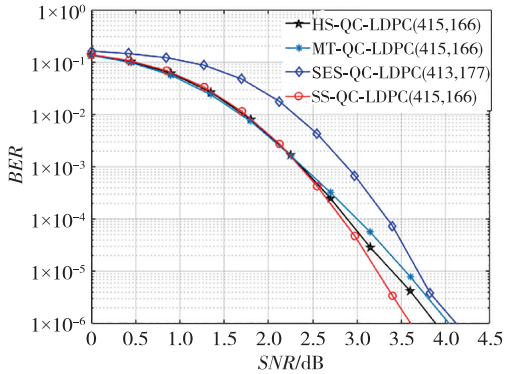


图5　SS-QC-LDPC(415,166)码与其他码字的纠错性能对比

由图5可知，当误码率(BER)为1×10^{-6}时，相较于文献[9]基于Hoey序列(HS)构造的环长为8的规则HS-QC-LDPC(415,166)码、文献[10]基于改进Tanner(MT)构造的环长为8的规则MT-QC-LDPC(415,166)码、文献[11]基于改进SES算法的规则SES-QC-LDPC(413,177)码，本文构造的SS-QC-LDPC(415,166)码的编码净增益分别提升了约0.27,0.42,0.51 dB。

为进一步论证本文所构造的SS-QC-LDPC码的优越性，考虑构造大小为3×6的指数矩阵，即$L=6$，得到序列$c_i=\{80,50,113,40,136,20\}$，其中扩展因子$p=137$。构造出的指数矩阵如公式(12)所示，将该指数矩阵进行扩展即可得到本文需构造的SS-QC-LDPC(822,411)码，其码率为0.5。

$$E=\begin{bmatrix}0(\mathrm{mod}\,p) & 1(\mathrm{mod}\,p) & 3(\mathrm{mod}\,p) & 4(\mathrm{mod}\,p) & 9(\mathrm{mod}\,p) & 10(\mathrm{mod}\,p)\\ 0(\mathrm{mod}\,p) & 2(\mathrm{mod}\,p) & 6(\mathrm{mod}\,p) & 8(\mathrm{mod}\,p) & 18(\mathrm{mod}\,p) & 20(\mathrm{mod}\,p)\\ 83(\mathrm{mod}\,p) & 50(\mathrm{mod}\,p) & 113(\mathrm{mod}\,p) & 40(\mathrm{mod}\,p) & 136(\mathrm{mod}\,p) & 20(\mathrm{mod}\,p)\end{bmatrix} \tag{12}$$

将本文构造的SS-QC-LDPC(822,411)码与文献[9]基于HS构造的环长为8的规则HS-QC-LDPC(822,411)码、文献[10]基于MT构造的规则MT-QC-LDPC(822,411)码、文献[12]基于B3序列构造的环长为8的规则B3-QC-LDPC(822,411)码进行性能比较，性能对比结果如图6所示。当BER为1×10^{-6}时，与以上三种码相比，本文构造的SS-QC-LDPC(822,411)码的编码净增益分别提升了约0.31,0.53,0.34 dB。

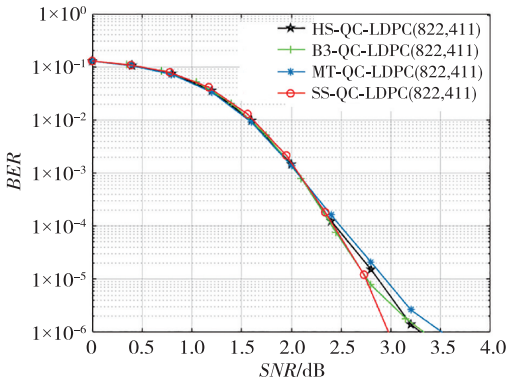


图6　SS-QC-LDPC(822,411)码与其他码字的纠错性能对比

因此，本文所构造的短码长SS-QC-LDPC码具有较好的纠错性能并且没有出现错误平层现象。

6　结语

针对短码长QC-LDPC码中存在短环与陷阱集密集而导致的性能不佳问题，本文基于Stanley序列与遗传算法提出了一种短码长QC-LDPC码构造方法。该方法通过Stanley序列的特性，实现了指数矩阵前两行的无四环构造；借助遗传算法的全局优化能力，搜索得到满足无四六环且小陷阱集数量最少的第三行元素，最终构造出环长至少为8且陷阱集数量较少的短码长QC-LDPC码。仿真结果表明，所构造的QC-LDPC码相较于同码长、同码率的其他QC-LDPC码而言，其净编码增益更佳。所提方法的纠错性能更优，且无明显错误平层现象。

参考文献：

[1] Hong S, Ke J, Wang L. Global design of double protograph LDPC codes for joint source-channel coding [J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(2): 424-427.

[2] 袁建国，蒯家松，张帅康. 基于Stanley序列的QC-LDPC码新颖构造方法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版)，2023,

35(3): 427-433.
Yuan Jianguo, Kuai Jiasong, Zhang Shuaikang. Novel construction method on QC-LDPC codes based on the Stanley sequence [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2023, 35(3): 427-433.

[3] 张晓芳, 黎 勇. GPU的QC-LDPC码译码器设计与实现[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2021, 33(4): 577-583.
Zhang Xiaofang, Li Yong. Design and implementation of QC-LDPC decoder based on GPU [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2021, 33(4): 577-583.

[4] Kim I, Song H Y. Some new constructions of girth-8 QC-LDPC codes for future GNSS [J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(12): 3780-3784.

[5] 林宇晨, 谢肇鹏, 陈平平. 物理层网络编码的分层调制LDPC系统性能研究[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版), 2025, 37(3): 315-323.
Lin Yuchen, Xie Zhaopeng, Chen Pingping. Performance study of hierarchical modulation LDPC systems for physical layer network coding [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2025, 37(3): 315-323.

[6] Zhang L, Wang J. Construction of QC-LDPC codes from Sidon sequence using permutation and segmentation [J]. IEEE Communications Letters, 2022, 26(8): 1710-1714.

[7] Sarıduman A, Pusane A E, Taşkın Z C. On the construction of regular QC-LDPC codes with low error floor [J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(1): 25-28.

[8] Majdzade M, Gholami M. On the class of high-rate QC-LDPC codes with girth 8 from sequences satisfied in GCD condition [J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(7): 1391-1394.

[9] 袁建国, 宋万闯. 一种基于Hoey序列的8环QC-LDPC码构造方法[J]. 电讯技术, 2025, 65(5): 793-799.
Yuan Jianguo, Song Wanchuang. A construction method of girth-8 QC-LDPC codes based on hoey sequence [J]. Telecommunication Engineering, 2025, 65(5): 793-799.

[10] Kim W, Cho H, Song H Y, et al. Some variations of Tanner's construction for short length QC-LDPC codes [J]. Electronics Letters, 2024, 60(3): e13088.

[11] Ovinnikov A, Kharin A, Zavertkin K, et al. Small elementary trapping sets elimination of girth-8 QC-LDPC codes [C]//2024 26th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA), 2024: 1-5.

[12] Kim D, Choi H, Song H Y. QC-LDPC codes from various Golomb Rulers [C]//2023 14th International Conference on Information and Communication Technology Convergence, 2024: 106-110.

作者简介:

袁建国(1968—),男,重庆市人,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为通信技术与信道编码技术。